Médian MT90 - P2019

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 12 points) **CHANGER DE COPIE**

1. (a) Donner la définition avec quantificateurs de « la suite réelle $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ ».
   (b) Soit $q \in \,]0\,,1[$. Utiliser cette définition pour montrer que la suite géométrique de terme général $v_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

2. Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n+1}{5^n}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est strictement monotone.
   (b) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que $n + 1 \leq 2^n$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ à préciser.
   (On ne demande pas d'utiliser la définition avec quantificateurs dans cette question).
   (d) On définit $A = \{u_n,\, n \in \mathbb{N}\}$.
      i. Montrer que A admet une borne inférieure et une borne supérieure.
      ii. A admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? Si oui, le donner. Dans tous les cas, démontrer la réponse.
      iii. Rappeler la caractérisation de la borne inférieure de A à l'aide des quantificateurs.
      iv. Utiliser cette caractérisation pour démontrer que $\inf A = \ell$.

3. On définit les suites (s_n) et (t_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (u_k)^2 \qquad \text{et} \qquad t_n = s_n + \frac{1}{n+1},$$

   où on rappelle que $u_n = \frac{n+1}{5^n}$. Montrer que les suites (s_n) et (t_n) sont adjacentes.
   (on pourra utiliser le fait que $u_n \leq \frac{1}{n+1}$, après l'avoir justifié.)

Exercice 2 (Barème approximatif : 9 points) **CHANGER DE COPIE**
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Soient P et Q deux propositions. Les propositions suivantes sont-elles toujours vraies ?
   (a) $(P \text{ et } Q) \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$.
   (b) $(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \text{ et } Q)$.

2. Soit E un ensemble et soient A, B et C trois sous-ensembles de E.
   Montrer que
   $$A \subset B \quad \Rightarrow \quad A \backslash (B \backslash C) = (A \cap C).$$

3. Soit D une partie de $\mathbb{R} \backslash \{1\}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.
   (a) i. Déterminer le nombre de solution(s) de $x^2 - ax + a = 0$, en fonction des valeurs de $a \in \mathbb{R}$. Donner l'expression des solutions lorsqu'elles existent.
       ii. Donner la définition de $\mathrm{Im} f$.
       iii. Montrer que $y \in \mathrm{Im} f \Rightarrow y \notin]0, 4[$.
   (b) En supposant que $D = \mathbb{R} \backslash \{1\}$, la fonction f est-elle injective ?
   (c) On suppose dans cette question que $D = [2, +\infty[$.
       i. Déterminer $\mathrm{Im} f$.
       ii. L'application $x \mapsto f(x)$ réalise-t-elle une bijection de D vers $\mathrm{Im}\, f$? Si oui, expliciter son application réciproque qu'on notera g. *(ensemble de départ, ensemble d'arrivée et expression algébrique.)*