Finaux MT91 - A2014/A2016

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 - A14

1. (a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\int \frac{1}{x^2-2x+3}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C\ , \quad C \in \mathbb{R}\ .$$

(Indication : utiliser la forme canonique de $f(x) = x^2 - 2x + 3$.)

(b) Déterminer la forme générale des primitives de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{x-3}{x^2-2x+3}\ .$$

(Indication : déterminer deux nombres réels α et β tels que $x - 3 = \alpha f'(x) + \beta$.)

2. Soit $F(x) = \dfrac{x^3-x^2+x-3}{(x+1)(x^2-2x+3)}$.

(a) Décomposer la fraction F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

(b) En déduire que la forme générale des primitives de F est

$$H(x) = x - \ln|x+1| + \ln\sqrt{x^2-2x+3} - \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C\ , \quad C \in \mathbb{R}\ .$$

3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle linéaire du 1er ordre suivante

$$(E_0) \qquad y'(x) = a(x)y(x) + b(x)\ , \quad x \in I\ ,$$

où a et b sont deux fonctions définies et continues sur I.

(a) Démontrer que la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E_0) est $y_h(x) = C\exp(A(x))$ où C est une constante réelle et A est une fonction à préciser.

(b) Pour tout $x \in I$, on pose $y_p(x) = \varphi(x)\exp(A(x))$ où φ est une fonction dérivable sur I. Démontrer que :

$$y_p \text{ est une solution particulière de } (E_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) = \int b(x)\exp(-A(x))\,dx\ .$$

4. Soit $I =]-1\,;+\infty[$. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E_1) \qquad y'(x) - \frac{1}{x+1}y(x) = \frac{x^3-x^2+x-3}{x^2-2x+3}\ , \quad x \in I\ .$$

(a) Donner la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E_1). *(Penser à simplifier l'expression de y_h).*

(b) Déterminer une solution particulière de (E_1).

(c) En déduire la forme générale des solutions de (E_1).

Exercice 1 - A15

1. À l'aide d'un changement de variable, calculer
$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2 - 2t + 4}\, dt \ .$$
(Indication : utiliser la forme canonique de $t^2 - 2t + 4$.)
2. Soit g la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par
$$g(x) = \frac{18 - 3x}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \ .$$
   (a) Décomposer la fraction g en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.
   (b) En déduire qu'une primitive de g est, à une constante réelle près,
   $$G(x) = 2\ln(x+2) - \ln(x^2 - 2x + 4) + \sqrt{3}\,\text{Arctan}\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) .$$
   (c) Déterminer le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $x = 1$ de la fonction G.
3. Soit $I =]0\,;\pi[$. On considère l'équation différentielle suivante
$$y'(x) + \frac{\cos x}{\sin x} y(x) = g(\cos x) \ , \quad x \in I \ .$$
   (a) Donner la forme générale des solutions y_h de l'équation homogène associée à (E_1).
   (Penser à simplifier l'expression de y_h).
   (b) On cherche une solution particulière y_p de (E_1) de la forme $y_p(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\sin x}$.
   Montrer que
   $$\varphi'(x) = g(\cos x)\, \sin x \ .$$
   (c) En déduire une solution particulière de (E_1).
   (d) Donner la forme générale des solutions de (E_1).
   (e) Déterminer l'unique solution y de (E_1) prolongeable par continuité en $x = 0$.
   Donner ce prolongement.

Exercice 2 - A15

Pour tout entier n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\, dx$.

1. Justifier l'existence de I_n et J_n pour tout entier naturel n.
2. Montrer que $0 \leq I_n \leq J_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la suite I_n converge vers 0.
4. Montrer, par une intégration par partie, que
$$I_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\, dx$$
5. En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 2nI_n = 1$. (*Remarque : on dit que I_n est équivalent à $\dfrac{1}{2n}$*.)

Exercice 1 - A16

Partie I

1. Soit F la fraction rationnelle définie sur $]-1\,,\,0]$ par $F(x) = \dfrac{9}{(1+x)(1-2x)^2}$.
   (a) Décomposer la fraction F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.
   (b) En déduire qu'une primitive de F est, à une constante réelle près,
$$G(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-2x}\right) + \frac{3}{1-2x}\ .$$

2. (a) Linéariser $\cos^3 x$.
   (b) En déduire que $1+\cos 3x = P(\cos x)$, où le polynôme P est défini par $P(x) = (1+x)(1-2x)^2$.
   (c) À l'aide du changement de variable $u = \cos t$, calculer
$$\varphi(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin t}{1+\cos 3t}dt\ , \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}\,,\,\pi\right[\ .$$

Partie II

Soit $I = [\frac{\pi}{2}\,,\,\pi[$. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E_1) \qquad y'(x) + \frac{3\sin 3x}{1+\cos 3x}y(x) = \sin x\ , \quad x \in I\ .$$

1. Donner la forme générale des solutions y_h de l'équation homogène associée à (E_1).
   (Penser à simplifier l'expression de y_h).
2. En utilisant la méthode de la variation de la constante, déterminer une solution particulière y_p de (E_1).
3. En déduire que la forme générale des solutions de (E_1) est
$$y(x) = (1+\cos 3x)\left(-\frac{1}{9}G(\cos x) + C\right)\ , \quad C \in \mathbb{R}\ .$$
4. Déterminer l'unique solution y de (E_1) qui soit un infiniment petit au voisinage de $\frac{\pi}{2}$. Préciser sa partie principale.