Final MT91/MA91 - P2018

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 6) **CHANGER DE COPIE**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(1-\lambda)y'' + \lambda y' - y = 8(\sin x)(\cos x)^2 , \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (E_1)$$

1. (a) Donner la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E_1) en fonction du paramètre λ.
   (b) On suppose que y_1 est une solution particulière de
   $$(1-\lambda)y'' + \lambda y' - y = b_1(x)$$
   et que y_2 est une solution particulière de
   $$(1-\lambda)y'' + \lambda y' - y = b_2(x) \; .$$
   Montrer que $y_p = y_1 + y_2$ est une solution particulière de (E_1) si et seulement si
   $$b_1(x) + b_2(x) = 8(\sin x)(\cos x)^2.$$
2. À l'aide des formules d'Euler, montrer que
   $$(\sin x)(\cos x)^2 = \frac{\sin(3x)}{4} + \frac{\sin(x)}{4}.$$
3. Dans cette question on suppose que $\lambda = 0$.
   (a) Montrer que la forme générale des solutions de l'équation (E_1) est
   $$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \tfrac{1}{5}\sin(3x) - \sin(x) \; , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$
   (b) Déterminer les constantes de sorte que la solution soit un infiniment petit au voisinage de 0 d'ordre le plus élevé possible. Préciser sa partie principale.

Exercice 2 (Barème approximatif : 7 points) **CHANGER DE COPIE**

1. Déterminer les solutions complexes $\delta = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, de $\delta^2 = -3 + 4i$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par $P(x) = (1+i)x^2 - 3x + (1-2i)$. Déterminer les racines de P.
   (Mettre les résultats sous la forme $\alpha + i\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).
3. On note $\overline{P}$ le polynôme conjugué de P et on pose $Q(x) = P(x)\overline{P}(x)$. Montrer que $Q \in \mathbb{R}[X]$.
4. Donner la factorisation en produit de facteurs irréductibles de Q dans $\mathbb{C}[X]$.
   (Indication : ne pas oublier le coefficient dominant a_n.)
5. En déduire la factorisation en produit de facteurs irréductibles de Q dans $\mathbb{R}[X]$.
6. Effectuer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{15}{(2x^2-6x+5)(x^2+1)}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 3 (Barème approximatif : 9 points) - **CHANGER DE COPIE**

Partie I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose pour $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \displaystyle\int_3^x \frac{1}{(t^2-6t+13)^n}\,dt$ et $I_n = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} F_n(x)$.

1. (a) À l'aide d'un changement de variable, déterminer l'expression algébrique de $F_1(x)$. *(Indication : utiliser la forme canonique de $t^2 - 6t + 13$.)*

   (b) En déduire la valeur de I_1.

2. (a) Soit $n \geq 1$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_3^x \frac{(t-3)^2}{(t^2-6t+13)^{n+1}}\,dt = -\frac{1}{2n}\frac{(x-3)}{(x^2-6x+13)^n} + \frac{1}{2n}F_n(x) \ .$$

   (Indiquez clairement vos choix pour les fonctions u et v' dans l'intégration par parties.)

   (b) En déduire que

$$4F_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\frac{(x-3)}{(x^2-6x+13)^n} + \frac{2n-1}{2n}F_n(x)$$

3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{4}I_n$.
4. Étudier la convergence de la suite (I_n), en précisant sa limite si elle existe.

Partie II

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} (x^2-6x+13)y' - (2x-6)y = 1\,, \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (E_2) \\ y(3) = 1. \end{cases}$$

1. Donner la forme générale des solutions y_h de l'équation homogène associée à (E_2). *(Penser à simplifier l'expression de y_h).*
2. En faisant varier la constante, montrer qu'une solution particulière de (E_2) est

$$y_p(x) = (x^2-6x+13)F_2(x) \ .$$

3. En déduire l'unique solution y_* du problème de Cauchy.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y_*''(x)$.