Corrigé du Final
MT91/MA91 - P2018

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 6) **CHANGER DE COPIE**

Soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(1-\lambda)y'' + \lambda y' - y = 8(\sin x)(\cos x)^2\,, \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (E_1)$$

1. (a) Donner la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E_1) en fonction du paramètre λ.

Correction : On cherche les solutions de l'équation caractéristique (E.C.) associée

$$(1-\lambda)\alpha^2 + \lambda\alpha - 1 = 0.$$

On calcule le discriminant en fonction de λ

$$\Delta = \lambda^2 + 4(1-\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2 \geq 0.$$

On distingue les cas $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$.

(i) Si $\lambda \neq 2$ alors $\Delta > 0$ et l'E.C admet 2 solutions réelles distinctes :

$$\alpha_1 = \frac{-\lambda + (\lambda-2)}{2(1-\lambda)} = -\frac{1}{1-\lambda} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{-\lambda-(\lambda-2)}{2(1-\lambda)} = \frac{-2\lambda+2}{2(1-\lambda)} = 1.$$

La forme générale des solutions de l'équation homogène est

$$\boxed{y_h(x) = C_1 e^{-\frac{x}{1-\lambda}} + C_2 e^x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) Si $\lambda = 2$ alors $\Delta = 0$ et l'E.C admet 1 seule solution réelle :

$$\alpha_0 = \frac{-\lambda}{2(1-\lambda)} = -\frac{2}{2(1-2)} = 1.$$

La forme générale des solutions de l'équation homogène est

$$\boxed{y_h(x) = (C_1 + C_2 x)e^x}\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) On suppose que y_1 est une solution particulière de

$$(1-\lambda)y'' + \lambda y' - y = b_1(x)$$

et que y_2 est une solution particulière de

$$(1-\lambda)y'' + \lambda y' - y = b_2(x)\,.$$

Montrer que $y_p = y_1 + y_2$ est une solution particulière de (E_1) si et seulement si

$$b_1(x) + b_2(x) = 8(\sin x)(\cos x)^2.$$

Correction : Par hypothèse

$$(1-\lambda)y_1'' + \lambda y_1' - y_1 = b_1(x)$$

et

$$(1-\lambda)y_2'' + \lambda y_2' - y_2 = b_2(x)\ .$$

On ajoute ces deux équations et on utilise la linéarité de la dérivation

$$(1-\lambda)(y_1'' + y_2'') + \lambda(y_1' + y_2') - (y_1 + y_2) = b_1(x) + b_2(x)\ .$$

$$\Leftrightarrow \qquad (1-\lambda)(y_1 + y_2)'' + \lambda(y_1 + y_2)' - (y_1 + y_2) = b_1(x) + b_2(x)\ .$$

En posant $y_p = y_1 + y_2$, on a bien $y_p' = y_1 + y_2$ et $y_p'' = y_1'' + y_2''$ donc

$$(1-\lambda)y_p'' + \lambda y_p' - y_p = b_1(x) + b_2(x)$$

Or y_p est solution de $(E_2$ donc

$$(1-\lambda)y_p'' + \lambda y_p' - y_p = 8(\sin x)(\cos x)^2.$$

Par conséquent

$$b_1(x) + b_2(x) = 8(\sin x)(\cos x)^2.$$

2. À l'aide des formules d'Euler, montrer que

$$(\sin x)(\cos x)^2 = \frac{\sin(3x)}{4} + \frac{\sin(x)}{4}.$$

Correction : On utilise $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ et $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$.

$$\begin{aligned}(\sin x)(\cos x)^2 = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) &= \frac{1}{8i}(e^{ix}-e^{-ix})(e^{ix}+e^{-ix})^2 \\ &= \frac{1}{8i}(e^{ix}-e^{-ix})(e^{2ix}+2+e^{-2ix}) \\ &= \frac{1}{8i}(e^{3ix}-e^{ix}+2e^{ix}-2e^{ix}+e^{-ix}-e^{-3ix}) \\ &= \frac{1}{8i}(e^{3ix}+e^{ix}-e^{-ix}-e^{-3ix}) \\ &= \frac{1}{8i}\Big((e^{3ix}-e^{-3ix})+(e^{ix}-e^{-ix})\Big) \\ &= \frac{1}{8i}\Big(2i\sin(3x)+2i\sin(x)\Big) = \frac{\sin(3x)}{4} + \frac{\sin(x)}{4}\end{aligned}$$

3. Dans cette question on suppose que $\lambda = 0$.

   (a) Montrer que la forme générale des solutions de l'équation (E_1) est

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} - \tfrac{1}{5}\sin(3x) - \sin(x)\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

   Correction : On utilise les résultats précédents.

   • Pour $\lambda = 0$, la forme générale des solutions de l'équation homogène est

$$\boxed{y_h(x) = C_1e^{-x} + C_2e^x}\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

• On a $8(\sin x)(\cos x)^2 = 2\sin(3x) + 2\sin(x)$. On pose $b_1(x) = 2\sin(3x)$ et $b_2(x) = 2\sin(x)$. On applique le résultat de la question **1. b)** pour trouver une solution particulière de (E_2). On cherche y_1 sous la forme

$$y_1(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x).$$

La dérivée seconde est

$$y_1''(x) = -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x)$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned} y_1''(x) - y_1(x) = 2\sin(3x) \quad &\Leftrightarrow \quad -10A\cos(3x) - 10B\sin(3x) = 2\sin(3x) \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{A = 0 \text{ et } B = -\tfrac{1}{5}}. \end{aligned}$$

On cherche y_2 sous la forme

$$y_2(x) = C\cos(x) + D\sin(x).$$

La dérivée seconde est

$$y_2''(x) = -C\cos(x) - D\sin(x)$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned} y_2''(x) - y_2(x) = 2\sin(x) \quad &\Leftrightarrow \quad -2C\cos(x) - 2D\sin(x) = 2\sin(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{C = 0 \text{ et } D = -1}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de (E_1) est

$$y_p(x) = -\frac{1}{5}\sin(3x) - \sin x.$$

La forme générale des solutions de l'équation (E_1) est

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{x} - \tfrac{1}{5}\sin(3x) - \sin x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Déterminer les constantes de sorte que la solution soit un infiniment petit au voisinage de 0 d'ordre le plus élevé possible. Préciser sa partie principale.

Correction : il faut déterminer les trois premiers termes du D.L. en 0 et choisir les bonnes valeurs de C_1 et C_2 pour annuler les 2 premiers termes du DL. La partie principale sera donc le 3ème terme. Ici un $DL_3(0)$ de y suffira.

$$y(x) = (C_1 + C_2) + (-C_1 + C_2 - \frac{3}{5} - 1)x + \frac{C_1 + C_2}{2}x^2 + (-C_1 + C_2 + \frac{27}{5} + 1)\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

On résoud

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 + C_2 - \frac{3}{5} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ 2C_2 = \frac{8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{4}{5} \\ C_2 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

L'unique solution de (E_1) étant un infiniment petit d'ordre le plus élevé possible au voisinage de 0 est

$$y(x) = -\frac{4}{5}e^{-x} + \frac{4}{5}e^{x} - \frac{1}{5}\sin(3x) - \sin x.$$

$\boxed{\text{Son ordre est 3 et sa partie principale est } \tfrac{4}{3}x^3}$.

Exercice 2 (Barème approximatif : 7 points) **CHANGER DE COPIE**

1. Déterminer les solutions complexes $\delta = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, de $\delta^2 = -3 + 4i$.

   Correction : On a $\delta^2 = (a+ib)^2 = (a^2 - b^2) + i(2ab)$ et $|\delta^2| = |\delta|^2 = a^2 + b^2$. On en déduit le système suivant
   $$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \; L_1 \\ 2ab = 4 \quad L_2 \\ a^2 + b^2 = 5 \; L_3 \end{cases}$$
   On résoud le système composé des lignes L_1 et L_3 :
   $$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 + L_3 & 2a^2 = 2 \\ L_3 - L_1 & 2b^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 2 \end{cases}$$
   La ligne L_2 nous indique que a et b doivent être de même signe. Les solutions possibles sont $\delta = 1 + 2i$ ou $\delta = -1 - 2i$.

2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par $P(x) = (1+i)x^2 - 3x + (1-2i)$. Déterminer les racines de P. *(Mettre les résultats sous la forme $\alpha + i\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).*

   Correction : • On calcule le discriminant :
   $$\Delta = (-3)^2 - 4(1+i)(1-2i) = 9 - 4(1 + 2 + i - 2i) = -3 + 4i \neq 0$$
   On sait que l'équation admet deux solutions distinctes.
   • D'après la question **1.**, une racine carrée de Δ est $\delta = 1 + 2i$. On calcule alors les deux solutions (sans laisser de nombre complexe au dénominateur)
   $$z_1 = \frac{3 + (1+2i)}{2(1+i)} = \frac{4+2i}{2(1+i)} = \frac{2+i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{2 + 1 - 2i + i}{2} = \boxed{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i},$$
   $$z_2 = \frac{3 - (1+2i)}{2(1+i)} = \frac{2-2i}{2(1+i)} = \frac{1-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{1 - 1 - 2i}{2} = \boxed{-i}.$$

3. On note $\overline{P}$ le polynôme conjugué de P et on pose $Q(x) = P(x)\overline{P}(x)$. Montrer que $Q \in \mathbb{R}[X]$.

   Correction : Il faut montrer que Q est un polynôme à coefficients réels.
   On a $\overline{P}(x) = (1-i)x^2 - 3x + (1+2i)$.
   $$\begin{aligned} Q(x) = & \left[(1+i)x^2 - 3x + (1-2i)\right]\left[(1-i)x^2 - 3x + (1+2i)\right] \\ &= 2x^4 - 3(1+i)x^3 + (-1+3i)x^2 - 3(1-i)x^3 + 9x^2 - 3(1+2i)x + (-1-3i)x^2 - 3(1-2i)x + 5 \\ &= 2x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 6x + 5. \end{aligned}$$
   Donc $Q(x) \in \mathbb{R}[X]$.

4. Donner la factorisation en produit de facteurs irréductibles de Q dans $\mathbb{C}[X]$.

   Correction : Les racines de $\overline{P}(x)$ sont
   $$\overline{z_1} = \boxed{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i} \quad \text{et } \overline{z_2} = \boxed{i}.$$
   La factorisation de Q dans $\mathbb{C}[X]$ est donc
   $$Q(x) = 2\left(x - \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}i\right)(x+i)\left(x - \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}i\right)(x - i).$$

5. En déduire la factorisation en produit de facteurs irréductibles de Q dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction : Pour obtenir la factorisation de Q dans $\mathbb{R}[X]$, on utilise la factorisation précédente en rassemblant les facteurs complexes 2 à 2 conjugués.

$$Q(x) = 2\Big[\left(x - \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}i\right)\left(x - \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}i\right)\Big]\Big[(x+i)(x-i)\Big].$$

Puis on les développe les produits 2 à 2 conjugués .

$$Q(x) = 2\Big[x^2 - 3x + \tfrac{5}{2}\Big]\Big[x^2+1\Big].$$

6. Effectuer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{15}{(2x^2-6x+5)(x^2+1)}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

Correction : Le dénominateur de cette fraction correspond à la factorisation de Q dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de facteurs irréductibles.

Le degré du numérateur est égal strictement inférieur au degré du dénominateur donc on n'a pas besoin d'effectuer une division euclidienne pour déterminer la partie entière.

la décomposition en éléments simple s'écrit donc

$$\frac{15}{(2x^2-6x+5)(x^2+1)} = \frac{k_1x+k_2}{2x^2-6x+5} + \frac{k_3x+k_4}{x^2+1}$$

On peut utiliser la racine $x = i$ de (x^2+1) pour déterminer k_3 et k_4 : on multiplie l'égalité ci-dessus par (x^2+1) :

$$\frac{15}{2x^2-6x+5} = \frac{(k_1x+k_2)(x^2+1)}{2x^2-6x+5} + (k_3x+k_4)$$

On évalue en $x = i$:

$$\frac{15}{-2-6i+5} = 0 + k_3i + k_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{15}{3-6i} = \frac{5}{1-2i} = \frac{5(1+2i)}{5} = 1+2i = k_3i+k_4$$

Donc

$$\boxed{k_3 = 2} \quad \text{et} \quad \boxed{k_4 = 1}.$$

On peut utiliser les limites en $+\infty$ pour déterminer k_1 en multipliant la fraction par x :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{15x}{(2x^2-6x+5)(x^2+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(k_1x+k_2)}{2x^2-6x+5} + \lim_{x\to+\infty} \frac{x(2x+1)}{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 0 = \frac{k_1}{2} + 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{k_1 = -4}.$$

À ce stade, nous avons

$$\frac{15}{(2x^2-6x+5)(x^2+1)} = \frac{-4x+k_2}{2x^2-6x+5} + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

On peut déterminer k_2 en évaluant la fraction en $x = 0$:

$$\frac{15}{5\times 1} = \frac{k_2}{5} + 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{k_2 = 10}.$$

Finalement

$$\boxed{\frac{15}{(2x^2-6x+5)(x^2+1)} = \frac{-4x+10}{2x^2-6x+5} + \frac{2x+1}{x^2+1}}.$$

Exercice 3 (Barème approximatif : 9 points) - **CHANGER DE COPIE**

Partie I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose pour $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \displaystyle\int_3^x \frac{1}{(t^2-6t+13)^n}\,dt$ et $I_n = \lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$.

1. (a) À l'aide d'un changement de variable, déterminer l'expression algébrique de F_1.
(Indication : utiliser la forme canonique de $t^2 - 6t + 13$.)

Correction : Écrire $t^2 - 6t + 13 = (t-3)^2 + 4$, puis

$$\frac{1}{t^2-6t+13} = \frac{1}{(t-3)^2+4} = \frac{1}{4\big(\frac{1}{4}(t-3)^2+1\big)} = \frac{1}{4}\frac{1}{(\frac{t-3}{2})^2+1} .$$

On en déduit que

$$\int_1^x \frac{1}{t^2-6t+13}\,dt = \frac{1}{4}\int_3^x \frac{1}{(\frac{t-3}{2})^2+1}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{x-3}{2}} \frac{1}{1+u^2}\,(2du) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{x-3}{2}} \frac{1}{1+u^2}\,du ,$$

où on a posé le changement de variable suivant $u = \frac{t-3}{2}$. On calcule les nouvelles bornes $t = 3 \Leftrightarrow u = 0$, $t = x \Leftrightarrow u = \frac{x-3}{2}$ puis $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \Rightarrow dt = 2du$. Finalement,

$$\int_1^x \frac{1}{t^2-6t+13}\,dt = \Big[\frac{1}{2}\operatorname{Arctan} u\Big]_0^{\frac{x-3}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\big(\tfrac{x-3}{2}\big) .$$

(b) En déduire la valeur de I_1.

Correction : par définition $I_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x)$. Par composition de limites, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{x-3}{2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{u\to+\infty} \operatorname{Arctan} u = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_1 = \lim_{x\to+\infty} F_1(x) = \tfrac{\pi}{4}}.$$

2. (a) Soit $n \geq 1$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_3^x \frac{(t-3)^2}{(t^2-6t+13)^{n+1}}\,dt = -\frac{1}{2n}\frac{(x-3)}{(x^2-6x+13)^n} + \frac{1}{2n}F_n(x) .$$

(Indiquez clairement vos choix pour les fonctions u et v' dans l'intégration par parties.)

Correction : On doit poser $\boxed{u(t) = \frac{1}{2}(t-3)}$ et $\boxed{v'(t) = \dfrac{2(x-3)}{(t^2-6t+13)^{n+1}}}$. On a bien

$$u(t)v'(t) = \frac{(t-3)^2}{(t^2-6t+13)^{n+1}}$$

On applique la formule

$$\int_3^x u(t)v'(t)\,dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_3^x - \int_x^3 u'(t)v(t)\,dt$$

On a $u'(t) = \frac{1}{2}$ et $v(t) = -\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{(x^2-6x+13)^n}$, donc

$$\int_3^x \frac{(t-3)^2}{(t^2-6t+13)^{n+1}}\,dt = \frac{(x-3)}{2} \times \left(-\frac{1}{n}\frac{1}{(x^2-6x+13)^n}\right) - \int_3^x \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}\frac{1}{(t^2-6t+13)^n}\right)dt$$
$$- \frac{1}{2n}\frac{(x-3)}{(x^2-6x+13)^n} + \frac{1}{2n}F_n(x).$$

(b) En déduire que

$$4F_{n+1}(x) = \frac{1}{2n}\frac{(x-3)}{(x^2-6x+13)^n} + \frac{2n-1}{2n}F_n(x).$$

Correction : on sait que $t^2-6t+13 = (t-3)^2+4$ donc $(t-3)^2 = (t^2-6t+13)-4$. On obtient

$$\int_3^x \frac{(t^2-6t+13)-4}{(t^2-6t+13)^{n+1}}\,dt = -\frac{1}{2n}\frac{(x-3)}{(x^2-6x+13)^n} + \frac{1}{2n}F_n(x)$$

$$\Leftrightarrow \qquad F_n(x) - 4F_{n+1}(x) = -\frac{1}{2n}\frac{(x-3)}{(x^2-6x+13)^n} + \frac{1}{2n}F_n(x)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2n}\frac{(x-3)}{(x^2-6x+13)^n} + \underbrace{\left(1-\frac{1}{2n}\right)}_{=\frac{2n-1}{2n}}F_n(x) = 4F_{n+1}(x).$$

3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq I_{n+1} \leq \frac{1}{4}I_n$.
   Correction : • On passe à la limite quand $x \to +\infty$ dans l'égalité obtenue :

$$4I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n \leq I_n.$$

   Donc $I_{n+1} \leq \frac{1}{4}I_n$.
   • Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $t^2-6t+13 = (t-3)^2+4 \geq 4 > 0$ donc

$$x \geq 3 \qquad \Rightarrow \qquad F_n(x) = \int_3^x \frac{1}{(t^2-6t+13)^n}\,dt \geq 0$$

   Comme le passage à la limite conserve les inégalités, on a $I_n = \lim_{x\to+\infty} F_n(x) \geq 0$.

4. Étudier la convergence de la suite (I_n), en précisant sa limite si elle existe.
   Correction : Par récurrence sur $n \geq 1$, on montre que

$$\boxed{0 \leq I_n \leq (\tfrac{1}{4})^{n-1}I_1} = (\tfrac{1}{4})^{n-1}\tfrac{\pi}{4}.$$

   En utilisant les résultats sur les suites géométriques, on sait que $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{4})^{n-1}\frac{\pi}{4} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite (I_n) converge et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

Partie II

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} (x^2-6x+13)y' + (6-2x)y = 1\,, \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (E_2) \\ y(3) = 1. \end{cases}$$

1. Donner la forme générale des solutions y_h de l'équation homogène associée à (E_2). *(Penser à simplifier l'expression de y_h).*
   Correction : En isolant y', l'équation homogène associée est

$$y'(x) = \frac{2x-6}{x^2-6x+13}y(x).$$

On pose $a(x) = \frac{2x-6}{x^2-6x+13}$. Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (car $x^2-6x+13>0$) donc elle admet une primitive définie sur $\mathbb{R}$ par

$$A(x) = \int \frac{2x-6}{x^2-6x+13}\,dx = \ln(x^2-6x+13)$$

La forme générale des solutions de l'équation homogène est

$$\boxed{y_h(x) = Ce^{\ln(x^2-6x+13)} = C(x^2-6x+13)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. En faisant varier la constante, montrer qu'une solution particulière de (E_2) est

$$y_p(x) = (x^2-6x+13)F_2(x)\ .$$

Correction : On pose $y_p(x) = \varphi(x)(x^2-6x+13)$. On dérive y_p

$$y_p'(x) = \varphi'(x)(x^2-6x+13) + \varphi(x)(2x-6)$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}
& (x^2-6x+13)y_p' + (6-2x)y_p = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & (x^2-6x+13)\left(\varphi'(x)(x^2-6x+13) + \varphi(x)(2x-6)\right) + (6-2x)\varphi(x)(x^2-6x+13) = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & (x^2-6x+13)\left(\varphi'(x)(x^2-6x+13) + \varphi(x)(2x-6)\right) + (6-2x)\varphi(x)(x^2-6x+13) = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & \varphi'(x)(x^2-6x+13)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\varphi'(x) = \frac{1}{(x^2-6x+13)^2}}.
\end{aligned}$$

Une primitive de cette fonction est $\boxed{\varphi(x) = F_2(x)}$.
Une solution particulière est donc

$$\boxed{y_p(x) = (x^2-6x+13)F_2(x)}.$$

3. En déduire l'unique solution y_* du problème de Cauchy.
Correction : La forme générale des solutions de l'équation avec second membre est

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (x^2-6x+13)(F_2(x)+C)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

On cherche y_* de sorte que $y_*(3) = 1$

$$y_*(3) = 4(F_2(3)+C) = 1.$$

Par définition de F_2 on sait que $F_2(3) = 0$ donc

$$4C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_*(x) = (x^2-6x+13)(F_2(x)+\tfrac{1}{4})}.$$

4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} y_*''(x)$.
Correction : Tout d'abord il faut calculer y_*''. Pour cela dérivons l'équation différentielle :

$$\begin{aligned}
(x^2-6x+13)y' + (6-2x)y = 1 \quad & \Rightarrow \quad (2x-6)y_*' + (x^2-6x+13)y_*'' - 2y_* + (6-2x)y_*' = 0 \\
& \Rightarrow \quad (x^2-6x+13)y_*''(x) - 2y_*(x) = 0 \\
& \Rightarrow \quad \boxed{y_*''(x) = \frac{2}{x^2-6x+13}y_*(x) = 2\left(F_2(x) + \frac{1}{4}\right)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} y_*''(x) = 2I_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}I_1 + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{2}}.$$