Final MT91/MA91 - P2019

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 7) **CHANGER DE COPIE**

1. À l'aide d'un changement de variable, déterminer l'expression algébrique de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par
$$G(x) = \int_{-2}^{x} \frac{1}{t^2+4t+5}\,dt\ .$$
(Indication : mettre le dénominateur sous forme canonique.)
2. On considère la fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ par
$$F(x) = \frac{2}{(x+3)(x^2+4x+5)}.$$
   (a) Décomposer la fraction F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.
   (b) En déduire qu'une primitive arbitraire de F est
$$H(x) = \alpha \ln|x+3| + \beta \ln(x^2+4x+5) + G(x)\ ,$$
   où α et β sont deux constantes réelles à préciser.
3. Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que
$$\int \frac{G(x)}{(x+3)^2}dx = \frac{1}{2}H(x) - \frac{G(x)}{x+3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$
(Le choix des fonctions u' et v devront être présentés.)
4. Soit $I =]-3\,,+\infty[$. On considère l'équation différentielle suivante
$$(E_1) \qquad (x+3)y'(x) - y(x) = G(x)\ , \quad x \in\ I\ .$$
   (a) Donner la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E_1). *(Penser à simplifier l'expression de y_h).*
   (b) En faisant varier la constante, déterminer une solution particulière de (E_1).
   (c) En déduire l'unique solution y_* de (E_1) vérifiant $y_*(-1) = 0$.

Exercice 2 (Barème approximatif : 6) **CHANGER DE COPIE**

1. Déterminer toutes les solutions complexes de l'équation algébrique $z^4 + 4 = 0$. *(On mettra les résultats sous la forme $a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.)*
2. Soit $P = X^6 - 2X^5 + \alpha X^4 + 4X^2 + \beta X + 8$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
   (a) Sans effectuer une division euclidienne, déterminer les valeurs de α et β de sorte que $(1 + i)$ soit une racine de P. *(Indication : utiliser* **1.** *pour obtenir les puissances successives de* $(1+i)$*.)*
   (b) Déterminer le polynôme Q tel que $P = (X^2 - 2X + 2)Q$.
   (c) Donner la décomposition du polynôme P en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. En déduire la multiplicité de la racine $(1 + i)$ de P.
   (d) Donner la décomposition du polynôme P en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3 (Barème approximatif : 10) **CHANGER DE COPIE**

On définit la fonction u sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$. On admet que $\operatorname{Im} u =]-1, 1[$.

1. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = 1 - \big(u(x)\big)^2$.
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1 + u(x)}{1 - u(x)} = e^{2x}$.
   (c) En déduire que la fonction u est bijective et que $\forall t \in]-1, 1[\,,\ u^{-1}(t) = \frac{1}{2} \ln\Big(\frac{1+t}{1-t}\Big)$.
2. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle du second ordre

$$(E_2) \qquad (1 - t^2)y''(t) - 2(t + \omega)\, y'(t) + \frac{\omega^2}{(1 - t^2)}\, y(t) = \frac{16}{(1 - t)^2}\ , \qquad t \in]-1\,, 1[\ .$$

   (a) Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]-1\,, 1[$. On définit la fonction z sur $\mathbb{R}$ par $z(x) = y\big(u(x)\big)$. Justifier que z est deux fois dérivable, puis calculer z' et z'' en fonction de u, y' et y''.
   (b) En déduire que y est solution de (E_2) si et seulement si la fonction z est solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(E_3) \qquad z''(x) - 2\omega z'(x) + \omega^2\, z(x) = 16\, e^{2x}\ , \qquad x \in \mathbb{R}\ .$$

   (c) Donner la forme générale des solutions z_h de l'équation homogène associée à (E_3).
   (d) Déterminer une solution particulière arbitraire de la forme $z_p(x) = \varphi_p(x)e^{2x}$ de l'équation avec second membre (E_3) en fonction des valeurs de ω. *(Indication : la fonction φ_p pouvant être une constante ou un polynôme, selon les cas $\omega \neq 2$ et $\omega = 2$.)*
3. On suppose $\omega = -2$.
   (a) Montrer que la forme générale des solutions associées à (E_2) est

$$y(t) = z(u^{-1}(t)) = \Big(\tfrac{1}{2}C_1 \ln\Big(\tfrac{1+t}{1-t}\Big) + C_2\Big)\tfrac{1-t}{1+t} + \tfrac{1+t}{1-t}, \quad t \in]-1, 1[$$

   où C_1 et C_2 sont des constantes réelles arbitraires.
   (b) Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle (E_2) qui soit un infiniment petit au voisinage de $t = 0$ d'ordre le plus élevé possible. Préciser sa partie principale.