Corrigé du Final
MT91/MA91 - P2019

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 7) **CHANGER DE COPIE**

1. À l'aide d'un changement de variable, déterminer l'expression algébrique de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par
$$G(x) = \int_{-2}^{x} \frac{1}{t^2+4t+5}\,dt\ .$$
Correction : Écrire
$$G(x) = \int_{-2}^{x} \frac{1}{(t+2)^2+1}\,dx = \int_{0}^{2+x} \frac{1}{1+u^2}\,du,$$
où on a posé le changement de variable suivant $\boxed{u=t+2}$ avec $\frac{dt}{du}=1 \Rightarrow dt = du$ et le changement des bornes $t=-2 \Leftrightarrow u=0$ puis $t=x \Leftrightarrow u=2+x$. Finalement,
$$G(x) = \Big[\operatorname{Arctan} u\Big]_0^{2+x} = \operatorname{Arctan}(2+x) - \operatorname{Arctan}(0) = \operatorname{Arctan}(2+x).$$

2. On considère la fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$ par $F(x) = \dfrac{2}{(x+3)(x^2+4x+5)}$.
   (a) Décomposer la fraction F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.
   Correction : On vérifie que x^2+4x+5 est irréductible : $\Delta = (4)^2 - 4\times 5 = -4 < 0$ donc x^2+4x+5 est irréductible et une racine complexe est $-2+i$. Ensuite on écrit :
$$\frac{2}{(x+3)(x^2+4x+5)} = \frac{a}{x+3} + \frac{bx+c}{x^2+4x+5}\ ,$$
   où a, b et c sont trois constantes réelles à déterminer. On a
$$a = \Big[(x+3)F(x)\Big]_{x=-3} = \left[\frac{2}{x^2+4x+5}\right]_{x=-3} = \frac{2}{9-12+5} = 1.$$
   et
$$b(-2+i)+c = \Big[(x^2+4x+5)F(x)\Big]_{x=-2+i} = \left[\frac{2}{x+3}\right]_{x=-2+i} = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i}{2} = 1-i,$$
   donc $(-2b+c)+ib = 1-i$, c'est-à-dire $b=-1$ et $-2b+c=1 \Rightarrow c=-1$. On conclut que
$$\boxed{F(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{x+1}{x^2+4x+5}}\ .$$

(b) En déduire qu'une primitive arbitraire de F est

$$H(x) = \alpha \ln|x+3| + \beta \ln(x^2+4x+5) + G(x) \ ,$$

où α et β sont deux constantes réelles à préciser.

Correction : On a

$$\int F(x)\,dx = \int \frac{1}{x+3}\,dx - \int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\,dx.$$

On réécrit le numérateur de l'élément simple de seconde espèce comme suit :

$$x+1 = \frac{1}{2}(2x+4) - 1.$$

$$\int F(x)\,dx = \ln|x+3| - \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx + \int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx.$$

On choisit, $\boxed{H(x) = \ln|x+3| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) + G(x)}$.

3. Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que

$$\int \frac{G(x)}{(x+3)^2}dx = \frac{1}{2}H(x) - \frac{G(x)}{x+3} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(Le choix des fonctions u' et v devront être présentés.)

Correction : On pose $u'(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ et $v(x) = G(x)$.

On calcule $u(x) = -\frac{1}{x+3}$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2+4x+5}$. La formule d'intégration par partie donne

$$\begin{aligned}\int \frac{G(x)}{(x+3)^2}dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,dx &= -\frac{G(x)}{x+3} + \int \frac{1}{(x+3)(x^2+4x+5)}dx \\ &= -\frac{G(x)}{x+3} + \frac{1}{2}H(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

4. Soit $I =]-3\,,+\infty[$.On considère l'équation différentielle suivante

$$(E_1) \qquad (x+3)y'(x) - y(x) = G(x)\ , \quad x \in I\ .$$

(a) Donner la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E_1). *(Penser à simplifier l'expression de y_h).*

Correction : On considère l'équation sans second membre :$(x+3)y'(x) - y(x) = 0$ et on isole y'

$$\boxed{y'(x) = \frac{1}{x+3}y(x)}\ .$$

Une primitive arbitraire de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+3}$ continue sur I, est $x \mapsto \ln(x+3)$. On sait que la forme générale des solutions est

$$\boxed{y_h(x) = C\exp(\ln(x+3)) = C(x+3)}\ ,$$

où C est une constante réelle.

(b) En faisant varier la constante, déterminer une solution particulière de (E_1).

Correction : On pose $y_p = \varphi(x)(x+3)$. On calcule la dérivée première

$$y_p'(x) = \varphi'(x)(x+3) + \varphi(x),$$

puis on détermine $\varphi'(x)$ à partir de l'équation complète (E_1)

$$\begin{aligned}(x+3)y_p'(x) - y_p(x) = G(x) &\Leftrightarrow (x+3)\left(\varphi'(x)(x+3)+\varphi(x)\right) - \varphi(x)(x+3) = G(x)\\ &\Leftrightarrow (x+3)^2\varphi'(x) = G(x)\\ &\Leftrightarrow \varphi'(x) = \frac{G(x)}{(x+3)^2}.\end{aligned}$$

D'après la question **3.**, on choisit $\varphi(x) = \frac{1}{2}H(x) - \frac{G(x)}{x+3}$, et donc

$$\boxed{y_p(x) = \frac{1}{2}(x+3)H(x) - G(x)}.$$

(c) En déduire l'unique solution de (E_1) vérifiant $y_*(-1) = 0$.

Correction : La forme générale des solutions de (E_1) sur I est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (C + \tfrac{1}{2}H(x))(x+3) - G(x)\ .$$

On cherche la valeur de C telle que $y(-1) = 0$.

$$y(-1) = 2C + H(-1) - G(-1) = 2C + \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{C = -\frac{\ln 2}{4} + \frac{\pi}{8}}.$$

L'unique solution recherchée est

$$\boxed{y_*(x) = \Big(-\tfrac{\ln 2}{4} + \tfrac{\pi}{8} + \tfrac{1}{2}H(x)\Big)(x+3) - G(x)}.$$

Exercice 2 (Barème approximatif : 6) **CHANGER DE COPIE**

1. Déterminer toutes solutions complexes de l'équation algébrique $z^4 + 4 = 0$. *(On mettra les résultats sous la forme $a+ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.)*

   Correction : on résoud $z^4 = -4$ en posant $z = |z|e^{i\arg z}$. On a $z^4 = |z|^4 e^{4i\arg z}$ et $-4 = 4e^{i\pi}$ donc

$$z^4 = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4 = 4 \\ 4\arg z = \pi + 2k\pi, \quad k = 0,1,2,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \\ \arg z = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k = 0,1,2,3. \end{cases}$$

   Les quatres solutions sont

$$z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos(\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{\pi}{4})\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{1+i},$$

$$z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos(\tfrac{3\pi}{4}) + i\sin(\tfrac{3\pi}{4})\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{-1+i},$$

$$z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \overline{-1+i} = \boxed{-1-i},$$

$$z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \overline{1+i} = \boxed{1-i},$$

2. Soit $P = X^6 - 2X^5 + \alpha X^4 + 4X^2 + \beta X + 8$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Sans effectuer une division euclidienne, déterminer les valeurs de α et β de sorte que $(1+i)$ soit une racine de P.

   Correction : On calcule $(1+i)^2 = 2i$, $(1+i)^4 = -4$, $(1+i)^5 = (1+i)^4(1+i) = -4-4i$ et $(1+i)^6 = (1+i)^4(1+i)^2 = -4 \times 2i = -8i$. Ensuite on résoud l'équation $P(1+i) = 0$

   $$P(1+i) = -8i - 2(-4-4i) - 4\alpha + 8i + \beta(1+i) + 8 = \boxed{8 - 4\alpha + 8i + \beta + i\beta + 8 = 0}$$

   On identifie parties réelle et imaginaire pour trouver $\boxed{\beta = -8}$ et $-4\alpha + 16 + \beta = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\alpha = 2}$ et $\boxed{P = X^6 - 2X^5 + 2X^4 + 4X^2 - 8X + 8}$.

   (b) Déterminer le polynôme Q tel que $P = (X^2 - 2X + 2)Q$.

   Correction : On effectue la division euclidienne de P par $(X^2 - 2X + 2)$ pour trouver $Q = X^4 + 4$.

   (c) Donner la décomposition du polynôme P en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. En déduire la multiplicité de la racine $(1+i)$ de P.

   Correction : On cherche les racines complexes de $X^2 - 2X + 2$.

   $$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4 = (2i)^2$$

   Donc le polynôme $X^2 - 2X + 2$ admet deux solutions complexes distinctes $1+i$ et $1-i$. La décomposition du polynôme P en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ est

   $$P = (X-1-i)^2(X-1+i)^2(X+1+i)(X+1-i).$$

   La multiplicité de $(1+i)$ est 2.

   (d) En déduire la décomposition du polynôme P en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

   Correction : On rassemble les facteurs 2 à 2 conjugués dans la décomposition précédentes pour obtenir

   $$P = [(X-1+i)(X-1-i)]^2[(X+1+i)(X+1-i)] = (X^2-2X+2)^2(X^2+2X+2).$$

Exercice 3 (Barème approximatif : 10) **CHANGER DE COPIE**

On définit la fonction u sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$. On admet que $\operatorname{Im} u =]-1,1[$.

1. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = 1 - \big(u(x)\big)^2$.

   Correction : La fonction u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et

   $$u'(x) = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - (u(x))^2.$$

   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1+u(x)}{1-u(x)} = e^{2x}$.

   Correction :

   $$\frac{1+u(x)}{1-u(x)} = \frac{\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}.$$

   (c) En déduire que la fonction u est bijective et que $\forall t \in]-1,1[,\ u^{-1}(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$.

Correction : Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) \in]-1,1[$, d'après la question **1. a)**, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) > 0$. La fonction u est donc bijective de $\mathbb{R}$ vers $\operatorname{Im} u =]-1,1[$. Soit $t \in]-1\,,1[$. On a l'équivalence

$$x = u^{-1}(t) \Leftrightarrow t = u(x)$$

D'après la question **1. b)**, on a

$$\tfrac{1+t}{1-t} = e^{2x} \Leftrightarrow \ln\left(\tfrac{1+t}{1-t}\right) = 2x \Leftrightarrow \boxed{\tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1+t}{1-t}\right) = x}$$

2. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle du second ordre

$$(E_2) \qquad (1-t^2)y''(t) - 2(t+\omega)\,y'(t) + \frac{\omega^2}{1-t^2}\,y(t) = \frac{16}{(1-t)^2}\,, \qquad t \in]-1\,,1[\,.$$

(a) Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]-1\,,1[$. On définit la fonction z sur $\mathbb{R}$ par $z(x) = y\big(u(x)\big)$. Justifier que z est deux fois dérivable, puis calculer z' et z'' en fonction de u, y' et y''.

Correction : Comme la fonction u est de classe $\mathscr{C}^\infty$, la fonction composée $y \circ u$ est de classe $\mathscr{C}^2$ au moins. D'après la question **1. a)**, on obtient

$$z'(x) = u'(x) \times y'(u(x)) = \boxed{\left(1-(u(x))^2\right) y'(u(x))}$$

$$\begin{aligned} z''(x) &= -2u'(x)u(x)y'(u(x)) + \left(1-(u(x))^2\right) \times u'(x)y''(u(x)) \\ &= \boxed{-2u(x)\left(1-(u(x))^2\right) y'(u(x)) + \left(1-(u(x))^2\right) y''(x)}. \end{aligned}$$

(b) En déduire que y est solution de (E_2) si et seulement si la fonction z est solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(E_3) \qquad z''(x) - 2\omega z'(x) + \omega^2\, z(x) = 16\, e^{2x}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Correction : Comme u est une fonction bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-1\,,1[$, en posant $t = u(x)$, l'équation (E_3) est équivalente à

$$\underbrace{(1-t^2)^2y''(t) - 2t(1-t^2)y'(t)}_{=z''(x)} - 2\omega\underbrace{(1-t^2)y'(t)}_{=z'(t)} + \omega^2\underbrace{y(t)}_{=z(x)} = 16\frac{1+t}{1-t}.$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-t^2)^2y''(t) - 2(t+\omega)(1-t^2)y'(t) + \omega^2 y(t) = 16\frac{1+t}{1-t}.$$

On divise l'équation par $1-t^2 \neq 0$ et on obtient

$$(1-t^2)y''(t) - 2(t+\omega)y'(t) + \frac{\omega^2}{1-t^2}\,y(t) = 2\frac{1+t}{1-t} \times \frac{1}{1-t^2} = \frac{16}{(1-t)^2}.$$

(c) Donner la forme générale des solutions z_h de l'équation homogène associée à (E_3).

Correction : L'équation caractéristique associée est $\alpha^2 - 2\omega\alpha + \omega^2 = 0$. Le discriminant associé est $\Delta = (2\omega)^2 - 4 \times \omega^2 = 0$. L'équation admet une unique solution $\alpha_0 = \omega$. La forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E_3) est

$$\boxed{z_h(x) = (C_1 x + C_2)e^{\omega x}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(d) Déterminer une solution particulière arbitraire de la forme $z_p(x) = \varphi_p(x)e^{2x}$ de l'équation avec second membre (E_3) en fonction des valeurs de ω. *(Indication : la fonction φ_p pouvant être une constante ou un polynôme, selon les cas $\omega \neq 2$ et $\omega = 2$.)*

Correction : • Si $\omega \neq 2$ alors on cherche z_p sous la forme $z_p(x) = Ae^{2x}$. Ainsi

$$4Ae^{2x} - 4A\omega e^{2x} + \omega Ae^{2x} = 16\, e^{2x} \Leftrightarrow A(2-\omega)^2 = 16 \Leftrightarrow A = \frac{16}{(2-\omega)^2}.$$

Une solution particulière est donc $\boxed{z_p(x) = \frac{16}{(2-\omega)^2}e^{2x}}$.

• Si $\omega = 2$ alors on cherche z_p sous la forme $z_p(x) = \varphi(x)e^{2x}$. On calcule

$$z_p'(x) = \varphi'(x)e^{2x} + 2\varphi(x)e^{2x} \quad \text{et} \quad z_p''(x) = \varphi''(x)e^{2x} + 4\varphi'(x)e^{2x} + 4\varphi(x)e^{2x}.$$

Ainsi

$$z_p''(x) - 4z_p'(x) + 4z_p(x) = 16\, e^{2x} \Leftrightarrow \varphi''(x) = 16.$$

On choisit comme primitive arbitraire $\varphi(x) = 8x^2$ et une solution particulière est $\boxed{z_p(x) = 8x^2e^{2x}}$.

3. On suppose $\omega = -2$.

(a) Montrer que la forme générale des solutions associées à (E_2) est

$$y(t) = z(u^{-1}(t)) = \left(\tfrac{1}{2}C_1 \ln\left(\tfrac{1+t}{1-t}\right) + C_2\right)\tfrac{1-t}{1+t} + \tfrac{1+t}{1-t}, \quad t \in]-1, 1[$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

Correction : On commence par donner la forme générale des solutiosn de (E_3) avec $\omega = -2$:

$$z(x) = z_h(x) + z_p(x) = (C_1 x + C_2)e^{-2x} + e^{2x}.$$

Ensuite on calcule $y(t) = z(u^{-1}(t))$ avec

$$x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right), \quad e^{2x} = \frac{1+t}{1-t} \quad \text{et} \quad e^{-2x} = \frac{1-t}{1+t}.$$

Donc

$$y(t) = \left(\frac{C_1}{2}\ln\left(\tfrac{1+t}{1-t}\right) + C_2\right)\tfrac{1-t}{1+t} + \tfrac{1+t}{1-t}.$$

(b) Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle (E_2) qui soit un infiniment petit au voisinage de $t = 0$ d'ordre le plus élevé possible. Préciser sa partie principale.

Correction : Tout d'abord, on doit vérifier que $y(0) = 0$ donc $\boxed{B = -1}$. Ensuite on effectue un DL à l'ordre 2 de y au voisinage de 0.

$$\tfrac{1+t}{1-t} = (1+t)(1+t+t^2+o(t^2)) = 1 + 2t + 2t^2 + o(t^2),$$

$$\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = 2t + o(t^2),$$

$$\frac{1-t}{1+t} = (1-t)(1-t+t^2+o(t^2)) = 1-2t+2t^2+o(t^2).$$

Donc

$$\begin{aligned} y(t) &= (C_1 t - 1)\big(1-2t+2t^2\big) + 1 + 2t + 2t^2 + o(t^2) \\ &= -1 + t(C_1+1) + t^2(-2C_1-2) + 1 + 2t + 2t^2 + o(t^2) \\ &= (C_1+3)t + (-2C_1)t^2 + o(t^2). \end{aligned}$$

Pour que y soit un infiniment petit d'ordre le plus élevé possible il faut choisir $\boxed{C_1 = -3}$ et la partie principale obtenue est $\boxed{6t^2}$.