Final MT91/MA91 - P2020
Conditions particulières
liées au COVID

La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants sur un total de 16 points.

Exercice 1 (Barème approximatif : 6.5)

1. À l'aide d'un changement de variable, déterminer la fonction G définie par

$$G(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{x} \frac{1}{4t^2+4t+2}\, dt$$

(Indication : mettre le dénominateur sous forme canonique.)

Correction : On a

$$\frac{1}{4t^2+4t+2} = \frac{1}{(2t+1)^2+1}$$

On pose le changement de variable $\boxed{u = 2t+1}$.

$$t = -\tfrac{1}{2} \Leftrightarrow u = 0 \quad \text{et} \quad t = x \Leftrightarrow u = 2x+1$$

$$\frac{dt}{du} = \frac{d[\frac{u-1}{2}]}{du} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad dt = \tfrac{1}{2}du$$

On obtient

$$G(x) = \int_{0}^{2x+1} \tfrac{1}{1+u^2}\, \tfrac{1}{2}du = \tfrac{1}{2}\text{Arctan}(2x+1).$$

2. À l'aide d'une intégration par partie, déterminer deux réels α et β tels que

$$\int G(x)\, dx = (x+\alpha)G(x) + \beta \ln(4x^2+4x+2) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(Indiquez clairement vos choix pour les fonctions u et v' dans l'intégration par parties.)

Correction : on pose $u'(x) = 1$ ey $v(x) = G(x)$.
On calcule $u(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{4x^2+4x+2}$. On obtient,

$$\int G(x)\, dx = xG(x) - \int \tfrac{x}{4x^2+4x+2}\, dx.$$

On a

$$\frac{x}{4x^2+4x+2} = \tfrac{1}{8} \times \frac{8x+4}{4x^2+4x+2} - \tfrac{1}{2} \times \frac{1}{4x^2+4x+2}.$$

TSVP !

D'où

$$\int G(x)\,dx = xG(x) - \frac{1}{8}\int \frac{8x+4}{4x^2+4x+2}\,dx + \frac{1}{2}G(x) = (x+\tfrac{1}{2})G(x) - \tfrac{1}{8}\ln(4x^2+4x+2) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

3. Soit $I =]-1\,,1[$. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E_1) \qquad (1-x^2)y'(x) - 2xy(x) = 2G(x)\,, \quad x \in I\,.$$

   (a) Donner la forme générale des solutions y_h de l'équation homogène associée à (E_1). *(Penser à simplifier l'expression de y_h).*

   Correction : On isole y' pour considérer l'équation

$$y'(x) = \frac{2x}{1-x^2}y(x) + \frac{2G(x)}{1-x^2}$$

   On pose $a(x) = \frac{2x}{1-x^2}y(x)$ et $b(x) = \frac{2G(x)}{1-x^2}$. Les fonctions a et b sont simultanément continues sur l'intervalle I. On calcule une primitive arbitraire de a

$$A(x) = -\ln(1-x^2) = \ln(\tfrac{1}{1-x^2}).$$

   On obtient la forme générale des solutions de l'équation homogène

$$y_h(x) = Ce^{\ln(\frac{1}{1-x^2})} = \frac{C}{1-x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

   (b) En utilisant la méthode de la variation de la constante, déterminer une solution particulière y_p de (E_1).

   Correction : inspiré de l'expression de y_h on pose $y_p(x) = \frac{\varphi(x)}{1-x^2}$. On a

$$\begin{aligned}
y_p'(x) = \frac{\varphi'(x)}{1-x^2} + \frac{2x\varphi(x)}{(1-x^2)^2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{\varphi'(x)}{1-x^2} + \frac{2x\varphi(x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{1-x^2} \times \frac{\varphi(x)}{1-x^2} + \frac{2G(x)}{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \frac{\varphi'(x)}{1-x^2} = \frac{2G(x)}{1-x^2} \\
&\Rightarrow \quad \varphi'(x) = 2G(x) \\
&\Rightarrow \quad \varphi(x) = (2x+1)G(x) - \tfrac{1}{4}\ln(4x^2+4x+2).
\end{aligned}$$

   Une solution particulière est dont

$$y_p(x) = \frac{(2x+1)G(x) - \frac{1}{4}\ln(4x^2+4x+2)}{1-x^2}.$$

(c) En déduire l'unique solution de l'équation (E_1) vérifiant la condition intiale $y(0) = 0$.

Correction : La forme générale des solutions est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{(2x+1)G(x) - \frac{1}{4}\ln(4x^2+4x+2) + C}{1-x^2}.$$

La condition initiale implique

$$G(0) - \tfrac{1}{4}\ln(2) + C = 0 \Rightarrow \boxed{C = \tfrac{1}{4}\ln(2) - \tfrac{\pi}{8}}.$$

L'unique solution du problème de Cauchy est

$$y(x) = \frac{(2x+1)G(x) - \frac{1}{4}\ln(4x^2+4x+2) + \frac{1}{4}\ln(2) - \frac{\pi}{8}}{1-x^2}.$$

Exercice 2 (Barème approximatif : 9.5)

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par $P(z) = iz^2 + (1+2i)z + 1 + i$. Déterminer les racines de P.

   Correction : On calcule le discriminant

   $$\Delta = (1+2i)^2 - 4i(1+i) = 1 + 4i - 4 - (4i - 4) = 1 \neq 0$$

   L'équation admet deux solutions distinctes

   $$z_1 = \frac{-1-2i+1}{2i} = -1 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1-2i-1}{2i} = \frac{-2-2i}{2i} = -1+i.$$

2. (a) Préciser les racines du polynôme conjugué $\overline{P}$ de P.

   Correction : Les racines de $\overline{P}$ sont -1 et $-1-i$.

   (b) On pose $Q(x) = P(x)\overline{P}(x)$. Donner les factorisations en produit de facteurs irréductibles de P, $\overline{P}$ et Q dans $\mathbb{C}[X]$.

   Correction : On trouve

   $$P = i(X+1)(X+1-i),$$
   $$\overline{P} = -i(X+1)(X+1+i),$$

   et

   $$Q = P\overline{P} = (X+1)^2(X+1-i)(X+1+i).$$

   (c) En déduire la factorisation en produit de facteurs irréductibles de Q dans $\mathbb{R}[X]$.

   Correction : On développe les facteurs 2 à 2 conjugués

   $$Q = P\overline{P} = (X+1)^2(X^2+2X+2).$$

3. On considère la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^4+4X^3+8X^2+10X+6}{(X+1)^2(X^2+2X+2)}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

(a) Déterminer le polynôme N tel que

$$F = 1 + \frac{N}{Q} \quad \text{avec } \deg N < \deg Q.$$

Correction : Il s'agit du reste de la division euclidienne de $A = X^4+4X^3+8X^2+10X+6$ par Q sous forme développée :

$$Q = (X^2+2X+1)(X^2+2X+2) = X^4+4X^3+7X^2+6X+2.$$

On a $A = 1 \times Q + N$ où $N = X^2+4X+4$. Ainsi

$$F = 1 + \frac{X^2+4X+4}{(X+1)^2(X^2+2X+2)}.$$

(b) Donner la forme de la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

Correction : La forme de la décomposition en éléments simples est

$$F = 1 + \frac{a_1}{(X+1)} + \frac{a_2}{(X+1)^2} + \frac{bX+c}{(X^2+2X+2)}$$

(c) Déterminer les coefficients des éléments simples.

Correction : On pose

$$\frac{X^2+4X+4}{(X+1)^2(X^2+2X+2)} = \frac{a_1}{(X+1)} + \frac{a_2}{(X+1)^2} + \frac{bX+c}{(X^2+2X+2)}$$

On obtient le coefficient a_2 en multipliant le tout par $(X+1)^2$

$$a_2 = \left[\frac{X^2+4X+4}{X^2+2X+2}\right]_{x=-1} = \frac{1-4+4}{1-2+2} = 1$$

On obtient les coefficients b et c en multipliant le tout par X^2+2X+2 et en posant $x = i-1$

$$b(i-1)+c = \left[\frac{X^2+4X+4}{(X+1)^2}\right]_{x=i-1} = \frac{(-2i)+4(i-1)+4}{(i-1+1)^2} = \frac{2i}{-1} = -2i$$

Ainsi $b = -2$ et $-b+c = 0 \Leftrightarrow c = b = -2$.
Enfin on peut obtenir a_1 en évaluant l'égalité en $x = 0$

$$\left[\frac{X^2+4X+4}{(X+1)^2(X^2+2X+2)}\right]_{x=0} = \left[\frac{a_1}{(X+1)} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{-2X-2}{(X^2+2X+2)}\right]_{x=0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4}{2} = a_1 + 1 + \frac{-2}{2} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2.$$

Nous obtenons

$$F = 1 + \frac{2}{(X+1)} + \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{2X+2}{(X^2+2X+2)}$$

4. En déduire que la forme générale des primitives de F est

$$\int F(x)\,dx = x - \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+2x+2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Correction :

$$\begin{aligned}
\int F(x)\,dx &= \int 1\,dx + 2\int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx - \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)}\,dx \\
&= x + 2\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} - \ln(x^2+2x+2) + C \\
&= x - \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)^2 - \ln(x^2+2x+2) + C \\
&= x - \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+2x+2}\right) + C.
\end{aligned}$$