Médian MT91/MA91 - P2018

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 11) **CHANGER DE COPIE**
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $G(x) = 2 + \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$.
   (a) Justifier l'existence d'un développement limité de la fonction G à l'ordre 4 , au voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
   (b) Donner le développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre 4, de la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
   (c) En déduire le développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre 4 de la fonction G.
   (d) Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de G. On note M_0 le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0.
      i. Quelle est l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0 ?
      ii. Préciser la position de la courbe par rapport à la tangente.
   (e) On définit
   $$\varphi(x) = \frac{G(x)}{\sqrt{1+x^2}}.$$
   En effectuant une division selon les puissances croissantes, déterminer le développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre 3, de la fonction φ.
   (f) Déterminer le développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre 4, de $\dfrac{(G(x))^2}{2}$.
   (g) Commenter les deux derniers résultats.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x + 1$. On admet que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et on note f^{-1} la fonction réciproque de f.
   (a) On suppose que f^{-1} admet le développement limité, au voisinage de 1, à l'ordre 3 suivant :
   $$f^{-1}(1+h) = \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 + h^3 \varepsilon(h), \quad \text{où } \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\to} 0$$
   Déterminer le développement limité de $f^{-1} \circ f$, au voisinage de $x = 0$, à l'ordre 3.
   (b) Sachant que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, déterminer les coefficients α_0, α_1, α_2 et α_3.
   (c) La fonction f^{-1} est-elle un infiniment petit au voisinage de 1 ?
   Si oui, préciser sa partie principale et son ordre.

Exercice 2 (Barème approximatif : 9) **CHANGER DE COPIE**
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $h = \frac{1}{n}$ et $x_i = ih$, $i = 0, \dots, n$. On définit u_n et U_n des fonctions étagées sur $[0,1]$ par :
   $$u_n(x) = f(x_i) \text{ sur }]x_{i-1}, x_i[, \; i = 1, \dots, n.$$
   $$U_n(x) = f(x_{i-1}) \text{ sur }]x_{i-1}, x_i[, \; i = 1, \dots, n.$$
   On définit également la série $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2}$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[$, $i = 1, \dots, n$, on a $u_n(x) \leq f(x) \leq U_n(x)$.
   (b) Montrer que
   $$\int_0^1 u_n(x) = S_n \quad \text{et} \quad \int_0^1 U_n(x) = S_n + \frac{1}{2n}$$
   (c) Rappeler la définition avec quantificateur(s) de “f est intégrable sur $[0,1]$”.
   (d) Utiliser cette définition pour montrer que f est intégrable sur $[0,1]$.
   (e) Calculer
   $$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$
   (f) En déduire que la série S_n converge et préciser $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

2. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Pour $x \neq 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} f(t)dt$.
   (a) Donner la valeur de $F(1)$.
   (b) Énoncer le premier théorème de la moyenne.
   (c) Soit $x \in]1, +\infty[$, montrer que
   $$\exists\, c \in]\tfrac{1}{x}, x[, \; \frac{F(x)}{x-1} = -\frac{1+x}{x} f(c).$$
   (d) En déduire que la fonction F est dérivable en $x = 1$ et préciser $F'(1)$.