Médian MT91 - P2019

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 10) **CHANGER DE COPIE**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. On définit l'application φ sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{\alpha x - x\cos x}{1+2x+2x^2}$.

   (a) Justifier l'existence du développement de Taylor-Young de la fonction φ à l'ordre 4 , au voisinage de tout point $a \in \mathbb{R}$.

   Correction : En tant que quotient de fonctions usuelles (cosinus et polynômes) de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, la fonction φ est au moins 4 fois continûment dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}$. Elle admet donc un développement de Taylor-Young au voisinage de tout point $a \in \mathbb{R}$.

   (b) À l'aide d'une division selon les puissances croissantes, montrer que le développement de Taylor-Young, au voisinage de 0, à l'ordre 4, de la fonction φ est

$$\varphi(x) = (\alpha-1)x - 2(\alpha-1)x^2 + (2\alpha - \tfrac{3}{2})x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x), \text{ avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

   (La division doit être posée sur la copie avec tous les détails des calculs des restes.)

   Correction : On a

$$\alpha x - x\cos x = (\alpha-1)x + \frac{x^3}{2} + o(x^4).$$

$(\alpha-1)x + \dfrac{x^3}{2}$	$1+2x+2x^2$
$R_1 :\ -2(\alpha-1)x^2 + (\frac{5}{2}-2\alpha)x^3$	$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(\alpha-1)x}_{Q_1} -2(\alpha-1)x^2}_{Q_2} +(2\alpha-\frac{3}{2})x^3}_{Q_3} -x^4}_{Q_4}$
$R_2 :\ (2\alpha-\frac{3}{2})x^3 + 4(\alpha-1)x^4$	
$R_3 :\ -x^4 + \dots$	
$\dots$	

   Conclusion : Le développement de Taylor-Young de $\varphi(x)$ au voisinage de 0 est

$$\varphi(x) \underset{x\sim 0}{=} (\alpha-1)x - 2(\alpha-1)x^2 + (2\alpha-\tfrac{3}{2})x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x), \text{ avec } \varepsilon(x) \to 0.$$

   (c) Justifier que la fonction φ est un infiniment petit au voisinage de 0. Préciser sa partie principale en fonction des valeurs de α.

Correction : On a $\lim_{x\to 0}\varphi(x)=\varphi(0)=0$ donc φ est un infiniment petit au voisinage de 0.
Si $(\alpha\neq 1)$ alors $\varphi(x)$ est un infiniment petit d'ordre 1 de partie principale $(\alpha-1)x$.
Si $\alpha=1$ alors $\varphi(x)$ est un infiniment petit d'ordre 3 de partie principale $\frac{1}{2}x^3$.

2. Pour $x\in\mathbb{R}^*$, on pose $g(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.
   (a) Pour quelle valeur de α, la fonction g admet-elle un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0.

   Correction : Soit $x\neq 0$.
   1ère réponse possible : Une condition nécéssaire pour admettre un développement limité au voisinage de 0 est : $\exists\,\ell\in\mathbb{R},\ \lim_{x\to 0} g(x)=\ell$.
   Si $\alpha\neq 1$, la limite n'existe pas : $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(\alpha-1)x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\alpha-1)}{x}=\pm\infty$.
   Si $\alpha=1$ alors la limite existe : $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}=0$. De plus, on obtient

$$g(x)\underset{x\sim 0}{=}\frac{x}{2}-x^2+x^2\varepsilon(x),\qquad \text{avec } \varepsilon(x)\underset{x\to 0}{\to} 0$$

   2ème réponse possible : La partie régulière du développement limité doit être un polynôme. Or, on a

$$g(x)\underset{x\sim 0}{=}(\alpha-1)\frac{1}{x}-2(\alpha-1)+(2\alpha-\tfrac{3}{2})x-x^2+x^2\varepsilon(x),\ \text{avec } \varepsilon(x)\to 0.$$

   Il faut donc choisir $\alpha=1$.
   Conclusion : La fonction g admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 si et seulement si $\boxed{\alpha=1}$.

   (b) Pour cette valeur de α, déterminer le développement limité de $e^{g(x)}$ à l'ordre 2, au voisinage de 0.

   Correction : On calcule $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ pour savoir qu'il faut utiliser le développement limité de exp en 0 à l'ordre 2.

$$e^h\underset{h\sim 0}{=}1+h+\frac{h^2}{2}+o(h^2).$$

   On compose les DLs en posant $h=\frac{x}{2}-x^2$:

$$\begin{aligned}e^{g(x)}&\underset{x\sim 0}{=}1+(\frac{x}{2}-x^2)+\frac{(\frac{x}{2}-x^2)^2}{2}+o(x^2)\\&\underset{x\sim 0}{=}1+\frac{x}{2}-x^2+\frac{x^2}{8}+o(x^2)\\&\underset{x\sim 0}{=}1+\frac{x}{2}-\frac{7}{8}x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

3. Dans cette question, on suppose $\boldsymbol{\alpha\neq 1}$. On définit, pour $x\in\,]0,+\infty[$, les fonctions

$$f_1(x)=x\varphi(\tfrac{1}{x}),\quad f_2(x)=x^2\varphi(\tfrac{1}{x})\quad\text{et}\quad f_3(x)=x^3\varphi(\tfrac{1}{x}).$$

   On notera $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ leurs courbes représentatives, respectivement.

   (a) Laquelle de ces trois courbes admet une droite asymptote non horizontale $\mathscr{D}$ en $+\infty$? Justifier votre réponse.

Correction : Puisque $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, on peut utiliser le DL de $\varphi(x)$ en 0 pour obtenir le DL de $\varphi(\frac{1}{x})$ en $+\infty$.

$$\varphi(\tfrac{1}{x}) \underset{x\sim+\infty}{=} \frac{\alpha-1}{x} - \frac{2(\alpha-1)}{x^2} + \frac{2\alpha-\frac{3}{2}}{x^3} - \frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

• On a $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \alpha - 1 \in \mathbb{R}$, donc la courbe $\mathscr{C}_1$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \alpha - 1$.
• On a $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\varphi(\frac{1}{x}) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \alpha - 1 \neq 0$, donc la courbe $\mathscr{C}_2$ admet une droite asymptote non horizontale en $+\infty$.
• On a $\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3\varphi(\frac{1}{x}) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_3(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \pm\infty$ donc $\mathscr{C}_3$ admet une branche parabolique d'axe de direction (Oy).
Conclusion : Seule la courbe $\mathscr{C}_2$ admet une droite asymptote non horizontale en $+\infty$.

(b) Dans cette question, on suppose $\boldsymbol{\alpha = \frac{3}{4}}$.

i. Donner l'équation de la droite $\mathscr{D}$.
Correction : la fonction f_2 admet le développement suivant en $+\infty$

$$f_2(x) \underset{x\sim+\infty}{=} -\frac{x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Conclusion : L'équation de la droite $\mathscr{D}$ est $\boxed{y = -\frac{x}{4} + \frac{1}{2}}$.

ii. Indiquer la position relative de cette courbe par rapport à son asymptote $\mathscr{D}$, au voisinage de $+\infty$.
Correction : La position relative de $\mathscr{D}$ par rapport à $\mathscr{C}_2$ dépend su signe de $-\frac{1}{x^2}$.
Conclusion : La courbe $\mathscr{C}_2$ est située sous $\mathscr{D}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2 (Barème approximatif : 10) **CHANGER DE COPIE**
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $h = \frac{1}{n}$ et $x_i = ih$, $i = 0,\dots,n$. On considère u_n et U_n des fonctions étagées sur $[0,1]$ telles que :

$$u_n(x) = f(x_{i-1}) \text{ sur } [x_{i-1}, x_i[,\ i = 1,\dots,n.$$

$$U_n(x) = f(x_i) \text{ sur }]x_{i-1}, x_i],\ i = 1,\dots,n.$$

On pose $S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{n^2+i^2}$.

(a) Montrer que pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[$, $i = 1,\dots,n$, on a $u_n(x) \leq f(x) \leq U_n(x)$.
Correction : Soit $x \in]x_{i-1}, x_i[$, $i = 1,\dots,n$. Sachant que les réels $x_0,\dots,x_n$ sont positifs, on a

$$\begin{aligned} x_{i-1} < x < x_i \Rightarrow x_{i-1}^2 < x^2 < x_i^2 &\Rightarrow 1 + x_{i-1}^2 < 1 + x^2 < 1 + x_i^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{1+x_{i-1}^2} < \sqrt{1+x^2} < \sqrt{1+x_i^2} \\ &\Rightarrow u_n(x) = f(x_i) < \sqrt{1+x^2} < U_n(x) = f(x_{i-1}). \end{aligned}$$

(b) Montrer que
$$\int_0^1 u_n(x)\,dx = S_n - \frac{\sqrt{2}-1}{n} \quad \text{et} \quad \int_0^1 U_n(x)\,dx = S_n.$$

Correction : Les fonctions u_n et U_n sont étagées donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 U_n(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_i) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\sqrt{1+(\tfrac{i}{n})^2}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{n^2+i^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2+i^2}}{n} = S_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 u_n(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\sqrt{1+(\tfrac{i-1}{n})^2}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\times\sqrt{1+(\tfrac{i}{n})^2}\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{n^2+i^2}\\ &= S_n + \frac{\sqrt{n^2+0^2}}{n^2} - \frac{\sqrt{n^2+n^2}}{n^2}\\ &= S_n + \frac{n}{n^2} - \frac{n\sqrt{2}}{n^2} = S_n - \frac{\sqrt{2}-1}{n}.\end{aligned}$$

(c) Utiliser la définition pour montrer que f est intégrable sur $[0,1]$.

Correction : Soit $\varepsilon > 0$. L'encadrement de f par u_n et U_n est déjà démontré. On résout

$$\int_0^1 (U_n(x) - u_n(x))\,dx < \varepsilon \Leftrightarrow S_n - \left(S_n - \frac{\sqrt{2}-1}{n}\right) < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}-1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\sqrt{2}-1}{\varepsilon}$$

La propriété d'Archimède justifie l'existence de $n \in \mathbb{N}$. Comme $\frac{\sqrt{2}-1}{\varepsilon} > 0$ on a $n \in \mathbb{N}^*$. On peut même choisir $n = E(\frac{\sqrt{2}-1}{\varepsilon}) + 1$.

(d) En déduire que la série S_n converge. *(On ne demande pas de déterminer la limite.)*

Correction : On a montré que f est intégrable et d'après la question **1.** on a

$$\int_0^1 u_n(x)\,dx \le \sup A = \inf B = \int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 U_n(x)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad S_n - \tfrac{\sqrt{2}-1}{n} \le \int_0^1 f(x)\,dx \le S_n$$

En réarrangeant les termes, on obtient

$$\int_0^1 f(x)\,dx \le S_n \le \int_0^1 f(x)\,dx + \frac{\sqrt{2}-1}{n}.$$

Puisque $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}-1}{n} = 0$, on conclut à l'aide du théorème des gendarmes que S_n converge et $\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(x)\,dx$.

2. (a) Soient u et v deux fonctions réelles dérivables, soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $x \in I$ tel que $u(x) \in I$ et $v(x) \in I$. Calculer la dérivée de $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$.

Correction : La fonction f étant continue, elle admet une primitive F, telle que $F'(x) = f(x)$. On a donc

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = F(v(x)) - F(u(x)).$$

Conclusion : La dérivée est $\boxed{v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))}$.

(b) On pose $G(x) = 3 + \displaystyle\int_1^{\tan x} \ln(t)\,dt$.

i. Déterminer l'intervalle J sur lequel la fonction G est définie et dérivable ?

Correction : L'intégrand $\ln t$ est définie pour $t \in I =]0, +\infty[$. La fonction tan est défini sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La fonction ln étant continue sur I, la fonction G est définie sur

$$J = I \cap \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\;=\; \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[\,.$$

ii. Préciser la valeur de $G(\frac{\pi}{4})$.

Correction : Comme $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, on a

$$\int_1^1 \ln t\, dt = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{G(\tfrac{\pi}{4}) = 3}.$$

iii. Calculer le développement limité de tan au voisinage de $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 2.

Correction : On utilise la formule de Taylor-Young à l'ordre de 2.

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \quad \text{ et } \tan''(x) = 2\tan'(x)\tan(x) = 2\tan(x)(1 + \tan^2(x)).$$

$$\boxed{\tan(\tfrac{\pi}{4} + h) \underset{h\sim 0}{=} 1 + 2h + 2h^2 + o(h^2)}.$$

iv. En déduire le développement limité de G à l'ordre 3 au voisinage de $\frac{\pi}{4}$.

Correction : • On commence par calculer $G'(x)$ d'après la formule **2a)** avec $v(x) = \tan(x)$ et $u(x) = 1$.

$$G'(x) = \big(1 + \tan^2(x)\big) \times \ln(\tan(x)).$$

• Pour obtenir le développement limité de $G(x)$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$, il suffit d'obtenir le développement limité de $G'(x)$ à l'ordre 2.

$$\begin{aligned}
G'(\tfrac{\pi}{4} + h) &\underset{h\sim 0}{=} \Big(1 + \big(1 + 2h + 2h^2\big)^2\Big) \times \Big(2h + 2h^2 - \frac{(2h + 2h^2)^2}{2}\Big) + o(h^2) \\
&\underset{h\sim 0}{=} \Big(1 + \big(1 + 4h + 4h^2 + 2h^2\big)\Big) \times \Big(2h + 2h^2 - 2h^2\Big) + o(h^2) \\
&\underset{h\sim 0}{=} (2 + 4h + 6h^2)(2h) + o(h^2) \\
&\underset{h\sim 0}{=} 4h + 8h^2 + o(h^2).
\end{aligned}$$

• On en déduit le DL_3 de $G(x)$ en intégrant le DL_2 précendent :

$$\boxed{G(\tfrac{\pi}{4} + h) \underset{h\sim 0}{=} 3 + 2h^2 + \frac{8}{3}h^3 + o(h^3)}.$$