Médian MT91/MA91 - P2020

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 5) **CHANGER DE COPIE**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p(x) = 2 - \alpha x + x^3$.
   (a) À l'aide de la formule de Taylor, déterminer les réels a_0, a_1, a_2 et a_3 tels que

$$p(x) = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3.$$

Correction : On calcule les dérivées successives

$$p'(x) = -\alpha + 3x^2, \quad p''(x) = 6x, \quad p^{(3)}(x) = 6$$

$$a_0 = p(1) = 3 - \alpha, \quad a_1 = p'(1) = 3 - \alpha, \quad a_2 = \frac{p''(1)}{2} = 3, \quad a_3 = \frac{p^{(3)}(1)}{6} = 1$$

Finalement,

$$p(x) = (3-\alpha) + (3-\alpha)(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3.$$

   (b) Pour quelle valeur de α, le polynôme p est-il un infiniment petit au voisinage de $a = 1$.
Correction : Le polynôme p est un infiniment petit au voisinage de $a = 1$ si

$$3 - \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 3.$$

Dans ce cas le développement de Taylor est

$$p(x) = 3(x-1)^2 + (x-1)^3.$$

   (c) Dans ce cas, préciser sa partie principale et son ordre.
Correction : La partie principale est $3(x-1)^2$ d'ordre 2.

2. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1 - \cos(2 \ln x)$.
   (a) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de $a = 1$.
Correction :
   - DL de $\ln x$ à l'ordre 3 au voisinage de $a = 1$: on pose $x = 1 + h$ et

$$\ln x \underset{x \approx 1}{=} \ln(1+h) \underset{h \approx 0}{=} h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + h^3 \varepsilon_1(h), \quad \varepsilon_1(h) \underset{h \to 0}{\to} 0$$

   - On pose $g(y) = 1 - \cos(2y)$. On a $b = \ln 1 = 0$. DL de g en $b = 0$ à l'ordre 3 :

$$g(y) = 1 - \left[1 - \frac{(2y)^2}{2}\right] + y^3 \varepsilon_3(y) = 2y^2 + y^3 \varepsilon_3(y),$$

- Le DL de f en $a = 1$ à l'ordre 3 est :

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x\approx 1}{=} f(1+h) &\underset{h\approx 0}{=} 2[h - \tfrac{h^2}{2} + \tfrac{h^3}{3}]^2 + h^3\varepsilon_3(h), \quad \varepsilon_3(h) \underset{h\to 0}{\to} 0 \\ &\underset{h\approx 0}{=} 2h^2 - 2h^3 + h^3\varepsilon_4(h), \quad \varepsilon_4(h) \underset{h\to 0}{\to} 0 \end{aligned}$$

(b) Pour $\alpha = 3$, déterminer la limite suivante $\lim_{x\to 1} \frac{p(x)}{f(x)}$.
Correction : il s'agit d'un quotient d'infiniments petits. On utilise les parties principales du numérateur et du dénominateur

$$\lim_{x\to 1} \frac{p(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)^2}{2(x-1)^2} = \frac{3}{2}.$$

Exercice 2 (Barème approximatif : 6) **CHANGER DE COPIE**

1. Soit f_1 la fonction définie par $f_1(x) = 2 + x\displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{\sqrt{1+2t}}\,dt$.

(a) Préciser le domaine de définition D de la fonction f_1.
Correction : on cherche le domaine de définition de l'intégrande caractérisé par la condition

$$1 + 2t > 0 \quad \Leftrightarrow \quad t \in \,]-\tfrac{1}{2}; +\infty[.$$

De plus l'intégrande est continu sur $D =]-\frac{1}{2}; +\infty[$ en tant que quotient et composée de fonctions usuelles. Par conséquent, la fonction f_1 est définie sur D.

(b) Justifier l'existence du développement de Taylor-Young de f_1 à l'ordre 4 en tout point $a \in D$.
Correction : L'intégrande est au moins de classe $\mathscr{C}^3$ sur D en tant que quotient et composée de fonctions usuelles, par conséquent la fonction f_1 est au moins de classe $\mathscr{C}^4$ sur D. Dans ce cas, elle admet le développement suivant : pour tout $a \in D$, il existe une fonction ε telle que pour tout $x \in D$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \tfrac{f^{(3)}(a)}{6}(x-a)^3 + \tfrac{f^{(4)}(a)}{24}(x-a)^4 + (x-a)^4\varepsilon(x-a),$$

avec $\varepsilon(x-a) \underset{x\to a}{\to} 0$.

(c) Montrer que le developpement limité de la fonction f_1 à l'ordre 4 au voisinage de $a = 0$ est

$$f_1(x) = 2 + x^2 + \frac{x^4}{3} + x^4\varepsilon(x), \qquad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

Correction : Comme l'intégrale simple est multipliée par x, il suffit de chercher le DL de l'intégrale à l'ordre 3. On commence alors à chercher le DL de l'intégrande à l'ordre 2 : on écrit

$$\frac{e^t}{\sqrt{1+2t}} = e^t\,(1+2t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$e^t = 1 + t + \tfrac{t^2}{2} + t^2\varepsilon_1(t), \quad \varepsilon_1(t) \underset{t\to 0}{\to} 0.$$

$$(1+h)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}h + \tfrac{3}{8}h^2 + h^2\varepsilon_2(h), \quad \varepsilon_2(h) \underset{h\to 0}{\to} 0.$$

On pose $h = 2t$,

$$\begin{aligned} (1+2t)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \tfrac{1}{2}(2t) + \tfrac{3}{8}(2t)^2 + t^2\varepsilon_3(t), \quad \varepsilon_3(t) \underset{t\to 0}{\to} 0 \\ &= 1 - t + \tfrac{3t^2}{2} + t^2\varepsilon_3(t). \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\frac{e^t}{\sqrt{1+2t}} &= [1+t+\tfrac{t^2}{2}] \times [1-t+\tfrac{3t^2}{2}] + t^2\varepsilon_4(t) \\
&= 1-t+\tfrac{3t^2}{2}+t-t^2+\tfrac{t^2}{2}+t^2\varepsilon_5(t) \\
&= 1+t^2+t^2\varepsilon_5(t).
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 2 + x\int_0^x \left(1+t^2+t^2\varepsilon_5(t)\right) dt \\
&= 2 + x\left(x + \frac{x^3}{3} + x^3\widetilde{\varepsilon}_5(x)\right) \\
&= 2 + x^2 + \frac{x^4}{3} + x^4\widetilde{\varepsilon}_5(x).
\end{aligned}$$

(d) En déduire que la fonction f_1 admet un extremum local en $x_* = 0$. Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum local.

Correction : Par unicité du développement limité on a $f'(0) = 0$. Ensuite on étudie le signe de $f(x) - f(0)$ au voisinage de 0 :

$$f_1(x) - f_1(0) = x^2 + \frac{x^4}{3} + x^4\varepsilon(x) \geq 0$$

Donc $f_1(0) = 2$ est un minimum local au voisinage de 0.

2. Pour $x > 0$, on pose $f_2(x) = (1-x)f_1(\frac{1}{\sqrt{x}})$.

(a) Montrer que la courbe représentative de f_2, notée $\mathscr{C}_{f_2}$, admet une droite asymptote au voisinage de $+\infty$ dont on précisera l'équation.

Correction : Le développement limité de f_2 au voisinage de $+\infty$ est

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= (1-x)\left(2+\tfrac{1}{(\sqrt{x})^2}+\tfrac{1}{3(\sqrt{x})^4}+\tfrac{1}{(\sqrt{x})^4}\varepsilon(\tfrac{1}{\sqrt{x}})\right) \\
&= (1-x)\left(2+\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{3x^2}+\tfrac{1}{x^2}\widetilde{\varepsilon}_1(\tfrac{1}{x})\right), \quad \widetilde{\varepsilon}_1(\tfrac{1}{x}) = \varepsilon(\tfrac{1}{\sqrt{x}}) \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \\
&= -2x+1+\tfrac{2}{3x}+\tfrac{1}{x}\widetilde{\varepsilon}_2(\tfrac{1}{x})
\end{aligned}$$

L'équation de l'asymptote est $y = -2x+1$.

(b) Indiquer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_{f_2}$ par rapport à son asymptote.

Correction : On pose $d(x) = f_2(x) - [-2x+1]$. Au voisinage de $+\infty$ on a

$$d(x) = \tfrac{2}{3x} + \tfrac{1}{x}\widetilde{\varepsilon}_2(\tfrac{1}{x}) > 0$$

La courbe est située au dessus de l'asymptote.

Exercice 3 (Barème approximatif : 10) **CHANGER DE COPIE**

Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$.

1. Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1} f(x) = \ell_2.$$

Correction : La première limite n'est pas indéterminée

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-1}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = \boxed{0 = \ell_1}.$$

La seconde est du type $(\frac{0}{0})$ donc on utilise la partie principale de $\ln x$ au voisinage de 1 :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{(x-1)} = \boxed{1 = \ell_2}.$$

On note $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f sur l'intervalle fermé borné $[0,1]$.
On admet que $\tilde{f}$ est croissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $h = \frac{1}{n}$ et $x_i = ih$, $i = 0,\dots,n$. On définit u_n et U_n des fonctions étagées sur $[0,1]$ par :

$$u_n(x) = \tilde{f}(x_{i-1}) \text{ sur } [x_i, x_{i+1}[,\ i = 0,\dots,n-1.$$
$$U_n(x) = \tilde{f}(x_i) \text{ sur }]x_i, x_{i+1}],\ i = 0,\dots,n-1.$$

On pose $S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i}{\ln n - \ln i}$.

(a) Montrer que

$$\int_0^1 u_n(x)\,dx = S_n \quad \text{et} \quad \int_0^1 U_n(x)\,dx = S_n + \frac{\ell_2}{n}.$$

Correction :

$$\int_0^1 u_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} h \times \tilde{f}(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1-\frac{i}{n}}{\ln\frac{i}{n}} \text{ on démarre la somme à } i=1 \text{ car } \tilde{f}(x_0)=0$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\frac{n-i}{n}}{\ln i - \ln n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i}{\ln i - \ln n} = S_n.$$

$$\int_0^1 u_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} h \times \tilde{f}(x_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} h \times \tilde{f}(x_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} h \times \tilde{f}(x_i) \quad + \quad h \times f(x_n) = S_n + \frac{1}{n}.$$

(b) Utiliser la définition avec quantificateurs pour montrer que $\tilde{f}$ est intégrable sur $[0,1]$.

Correction : La fonction $\tilde{f}$ étant croissante on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall i = 0,\dots,n-1, \quad \forall x \in]x_i, x_{i+1}[, \quad u_n(x) = \tilde{f}(x_i) \le \tilde{f}(x) \le \tilde{f}(x_{i+1}) = U_n(x).$$

Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_0^1 \big(U_n(x) - u_n(x)\big)\,dx = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

On pose $N = E(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$. On a bien $\int_0^1 \big(U_N(x) - u_N(x)\big)\,dx < \varepsilon$.

On a montré que $\tilde{f}$ est intégrable sur $[0,1]$.

3. Soit F la fonction définie sur $[0,1[$ par $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,dt$ pour $x \neq 0$ et $F(0) = 0$.

(a) Calculer $F'(x)$ pour $x \in]0,1[$.

Correction : On a

$$F'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{2x}{2\ln x} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x} = \tilde{f}(x).$$

(b) En déduire que $F(x) = \displaystyle\int_0^x \tilde{f}(t)\,dt$.

Correction : Comme $\forall\, x \in]0,1[,\ F'(x) = \tilde{f}(x)$ on peut déduire que

$$\forall\, x \in [0,1[,\ F(x) = \int_0^x \tilde{f}(x)\,dx + C \qquad \text{(deux primitives diffèrent d'une constante).}$$

Or,

$$F(0) = 0 \text{ et } \int_0^0 \tilde{f}(x)\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

D'où l'égalité

$$\forall\, x \in [0,1[,\ F(x) = \int_0^x \tilde{f}(x)\,dx.$$

(c) À l'aide du second théorème de la moyenne, montrer que pour tout $x \in]0,1[$, il existe $c \in]x^2, x[$, tel que

$$F(x) = c \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt$$

Correction : On pose $g_1(t) = t$ et $g_2(t) = \frac{1}{t\ln t}$.
Soit $x \in]0,1[$ alors $]x^2, x[\subset]0,1[$ et g_1 et g_2 sont continues sur $]x^2, x[$. De plus g garde un signe constant (strictement négatif) sur $]x^2, x[$. D'après le second théorème de la moyenne

$$\exists\, c \in]x^2, x[,\ F(x) = g_1(c) \int_x^{x^2} g_2(t)\,dt = c \int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t} dt.$$

(d) Montrer que $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt = \ln 2$. *(Indication : calculer la dérivée de* $\ln(-\ln t)$*.)*

Correction : Comme proposé en indication, on calcule

$$[\ln(-\ln t)]' = \frac{-\frac{1}{t}}{-\ln t} = \frac{1}{t\ln t}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,dt &= \Big[\ln(-\ln(t))\Big]_x^{x^2} \\
&= \ln(-\ln(x^2)) - \ln(-\ln(x)) \\
&= \ln(-2\ln(x)) - \ln(-\ln(x)) \\
&= \ln(2) + \ln(-\ln(x)) - \ln(-\ln(x)) = \ln(2)
\end{aligned}$$

(e) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1} F(x)$.

Correction : On a
$$\forall x \in]0,1[,\ \exists c \in]x^2, x[,\ F(x) = c\ln 2.$$
D'après le théorème des gendarmes
$$x^2 < c < x \quad \Rightarrow \quad c \underset{x\to 1}{\to} 1$$
On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} F(x) = \ln 2$.

4. Déduire des questions précédentes que la série S_n converge et préciser sa limite.

Correction : On a montré que $\tilde{f}$ est intégrable sur $[0,1]$.

D'apràs les questions **3(b)** et **3(e)** on a $\displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)\,dt = \ln 2$.

Avec les notations du cours, $\sup A$ et $\inf B$ existent et $\sup A = \inf B = \displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)\,dt$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\int_0^1 u_n(t)\,dt \in A \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 u_n(t)\,dt = S_n \le \sup A = \ln 2$$
et
$$\int_0^1 U_n(t)\,dt \in B \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 U_n(t)\,dt = S_n + \frac{1}{n} \ge \inf B = \ln 2.$$
On en déduit que
$$\ln 2 - \tfrac{1}{n} \le S_n \le \ln 2.$$
Comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, d'après le théorème des gendarmes S_n converge et
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln 2.$$