Médian MT91/MA91 - P2021

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 7) **CHANGER DE COPIE**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre et $p(x) = (x-1)(x-\alpha)$. À l'aide de la formule de Taylor pour les polynômes, déterminer les réels a_1 et a_2 tels que
$$p(x) = a_1(x-1) + a_2(x-1)^2.$$
2. Soit $f : [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \text{Arcsin}(x^2 - x)$.
   (a) Justifier que $f(x)$ admet un développement de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 1.
   (b) Sachant que
   $$\text{Arcsin}' \, t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$
   donner le développement Taylor-Young de $\text{Arcsin}\, t$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
   (c) En déduire le développement de Taylor-Young de f à l'ordre 3 au voisinage de 1, en utilisant le changement de variable $x = 1+h$. *(Utiliser la question* **1.** *pour une valeur α judicieusement choisie).*
3. On pose $g(x) = \frac{f(x)}{x^2-3x+2}$ si $x \neq 0$ et $g(1) = -1$. On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative.
   (a) Effectuer la division selon les puissances croissantes de $A(h) = 1 + h + \frac{h^2}{6}$ par $B(h) = -1 + h$ avec un reste de valuation 3.
   (b) En déduire le développement limité de $g(1+h)$ à l'ordre 2 au voisinage de $h = 0$. *(Utiliser la question* **1.** *pour une valeur α judicieusement choisie au dénominateur).*
   (c) Préciser l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ en $x = 1$ et sa position relative par rapport à $\mathscr{C}_g$.

Exercice 2 (Barème approximatif : 4) **CHANGER DE COPIE**

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}(2x+3)$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer la fonction g telle que $\frac{f(x)}{x} = g(\frac{1}{x})$.
2. Montrer que le développement limité de la fonction $g(t)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 est de la forme
$$g(t) = 2 + t + \alpha_2 t^2 + o(t^2),$$
où $\alpha_2 \neq 0$ est à préciser.
3. En déduire le développement limité de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
4. (a) Donner l'équation de la droite asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
   (b) Indiquer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 3 (Barème approximatif : 5) **CHANGER DE COPIE**

Soient $a > 0$ et b deux paramètres. On considère la fonction définie sur $I =]-\frac{1}{a}, +\infty[$, par

$$f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2} + \ln(1 + ax) + be^{2x}.$$

1. Déterminer le développement limité de $f(x)$ au voisinage de $x = 0$ à l'ordre 3.
2. Déterminer a et b tel que $f(x)$ soit un infiniment petit au voisinage de $x = 0$ d'ordre le plus élevé possible.
3. Quelle est la partie principale obtenue ?
4. La fonction f obtenue réalise-t-elle un extremum local en $x = 0$? Si oui, préciser sa nature ?(minimum ou maximum local).