Médian MT91/MA91 - P2021

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 7) **CHANGER DE COPIE**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre et $p(x) = (x-1)(x-\alpha)$. À l'aide de la formule de Taylor pour les polynômes, déterminer les réels a_1 et a_2 tels que

$$p(x) = a_1(x-1) + a_2(x-1)^2.$$

Correction : on a $a_1 = p'(1)$ et $a_2 = \frac{p''(1)}{2}$.
On a $p'(x) = 2x - (1+\alpha)$ et $p''(x) = 2$. D'où

$$a_1 = 1 - \alpha \qquad \text{et} \qquad a_2 = 1.$$

2. Soit $f : [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \operatorname{Arcsin}(x^2 - x)$.
   (a) Justifier que $f(x)$ admet un développement de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 1.
   Correction : La fonction Arcsin est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et $x^2 - x = 1$ lorsque $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. L'équation $x^2 - x = -1$ n'admet pas de solutions réelles. Par composition avec un polynôme de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, la fonction f est au moins 3 fois continûment dérivable sur l'intervalle $]\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$ contenant 1. Elle admet donc un développement de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 1.
   (b) Sachant que

$$\operatorname{Arcsin}' t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

   donner le développement Taylor-Young de $\operatorname{Arcsin} t$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
   Correction : Il suffit d'utiliser le développement de Taylor-Young de $(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$ au voisinage de 0 pour obtenir celui de $\operatorname{Arcsin} t$ à l'ordre 3.

$$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t), \quad \text{avec } \varepsilon(t) \underset{t\to 0}{\to} 0.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Arcsin} t &= \operatorname{Arcsin} 0 + t + \frac{1}{6}t^3 + t^3\widetilde{\varepsilon}(t), \quad \text{avec } \widetilde{\varepsilon}(t) \underset{t\to 0}{\to} 0 \\ &= t + \frac{1}{6}t^3 + t^3\widetilde{\varepsilon}(t),\end{aligned}$$

   car $\sin(0) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Arcsin} 0 = 0$.
   (c) En déduire le développement de Taylor-Young de f à l'ordre 3 au voisinage de 1, en utilisant le changement de variable $x = 1+h$. *(Utiliser la question* **1.** *pour une valeur α judicieusement choisie).*

Correction : • On a $x^2 - x = (x-1)(x-0) = p(x)$ avec $\alpha = 0$ donc

$$x^2 - x = (x-1) + (x-1)^2 \underset{x=1+h}{=} h + h^2.$$

• Comme $p(1) = 0$, on peut utiliser le développement de Taylor-Young obtenu à la question précédente et substituer $t = h + h^2$.

$$\begin{aligned} f(1+h) &= (h+h^2) + \frac{(h+h^2)^3}{6} + h^3\varepsilon_2(h), \quad \text{avec } \varepsilon_2(h) \underset{h\to 0}{\to} 0 \\ &= h + h^2 + \frac{h^3}{6} + h^3\varepsilon_2(h), \quad \text{avec } \varepsilon_2(h) \underset{h\to 0}{\to} 0 \end{aligned}$$

3. On pose $g(x) = \frac{f(x)}{x^2-3x+2}$ si $x \neq 0$ et $g(1) = -1$. On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative.
   (a) Effectuer la division selon les puissances croissantes de $A(h) = 1 + h + \frac{h^2}{6}$ par $B(h) = -1 + h$ avec un reste de valuation 3.
   Correction : On a

$$\begin{array}{l|l} 1 + h + \frac{1}{6}h^2 & -1+h \\ \hline R_1 : \quad 2h + \frac{1}{6}h^2 & \underbrace{\underbrace{\underbrace{-1}_{Q_1} -2h}_{Q_2} - \frac{13}{6}h^2}_{Q_3} \\ \qquad R_2 : \quad \frac{13}{6}h^2 & \\ \qquad\qquad R_3 : \quad \frac{13}{6}h^3 & \end{array}$$

   (b) En déduire le développement limité de $g(1+h)$ à l'ordre 2 au voisinage de $h = 0$. *(Utiliser la question* **1.** *pour une valeur α judicieusement choisie au dénominateur).*
   Correction : On factorise le dénominateur

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

Pour $\alpha = 2$, le développement de T-Y de $p(x)$ au voisinage de 1 est :

$$p(x) = -(x-1) + (x-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad p(1+h) = -h + h^2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} g(1+h) &= \frac{h + h^2 + \frac{h^3}{6} + h^3\varepsilon_2(h)}{-h+h^2} \\ &= \frac{1 + h + \frac{h^2}{6} + h^2\varepsilon_2(h)}{-1+h} \\ &= -1 - 2h - \frac{13}{6}h^2 + h^2\varepsilon_3(h), \quad \text{avec } \varepsilon_3(h) \underset{h\to 0}{\to} 0 \end{aligned}$$

   (c) Préciser l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ en $x = 1$ et sa position relative par rapport à $\mathscr{C}_g$.
   Correction : L'équation de la tangenta est $y = -1 - 2(x-1) = 1 - 2x$. De plus

$$g(x) - (1-2x) = -\frac{13}{6}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_3(x-1) \leq 0.$$

La courbe $\mathscr{C}_g$ est située sous la tangente au voisinage de 1.

Exercice 2 (Barème approximatif : 4) **CHANGER DE COPIE**

Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}(2x+3)$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer la fonction g telle que $\frac{f(x)}{x} = g(\frac{1}{x})$.

   Correction : On a
$$\frac{f(x)}{x} = e^{-\frac{1}{x}}\frac{2x+3}{x} = e^{-\frac{1}{x}}\left(2+\frac{3}{x}\right).$$
   On en déduit que $g(t) = e^{-t}(2+3t)$.

2. Montrer que le développement limité de la fonction $g(t)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 est de la forme
$$g(t) = 2 + t + \alpha_2 t^2 + o(t^2),$$
   où $\alpha_2 \neq 0$ est à préciser.

   Correction : On détermine d'abord le développement de T-Y de e^{-t} en 0 à l'ordre 2 :
$$e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$
   On multiplie la partie régulière par $(2+3t)$ et on tronque le résultat à la puissance 2 :
$$\begin{aligned} g(t) &= (2+3t)\left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right) + o(t^2) \\ &= 2 + t - 2t^2 + o(t^2). \end{aligned}$$

3. En déduire le développement limité de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

   Correction : Au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$ on a
$$f(x) = xg(\tfrac{1}{x}) = 2x + 1 - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. (a) Donner l'équation de la droite asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

   Correction : L'équation de l'asympptote est $y = 1 + 2x$.

   (b) Indiquer la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote en $+\infty$ et $-\infty$.

   Correction : Au voisinage de $+\infty$ on a
$$f(x) - (1+2x) = -\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) < 0,$$
   donc la courbe est positionnée sous l'asymptote. Au voisinage de $-\infty$ on a
$$f(x) - (1+2x) = -\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) > 0,$$
   donc la courbe est positionnée au-dessus de l'asymptote.

Exercice 3 (Barème approximatif : 5) **CHANGER DE COPIE**

Soient $a > 0$ et b deux paramètres. On considère la fonction définie sur $I =]-\frac{1}{a}, +\infty[$, par
$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2} + \ln(1+ax) + be^{2x}.$$

1. Déterminer le développement limité de $f(x)$ au voisinage de $x = 0$ à l'ordre 3.

   Correction : Dans le développement de T-Y au voisinage de $t = 0$ de $\frac{1}{1+t}$, on substitue $t = x + x^2$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x+x^2} &= 1-(x+x^2)+(x+x^2)^2-(x+x^2)^3+o(x^3)\\ &= 1-x-x^2+x^2+2x^3-x^3+o(x^3)\\ &= 1-x+x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

   Dans le développement de T-Y au voisinage de $t = 0$ de $\ln(1+t)$, on substitue $t = ax$:

$$\begin{aligned}\ln(1+ax) &= ax-\frac{(ax)^2}{2}+\frac{(ax)^3}{3}+o(x^3)\\ &= ax-\tfrac{a^2}{2}x^2+\tfrac{a^3}{3}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

   Dans le développement de T-Y au voisinage de $t = 0$ de e^t, on substitue $t = 2x$:

$$\begin{aligned}e^{2x} &= 1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{6}+o(x^3)\\ &= 1+2x+2x^2+\tfrac{4}{3}x^3+o(x^3).\end{aligned}$$

   Finalement,

$$f(x) = (1+b)+(-1+a+2b)x+(-\tfrac{a^2}{2}+2b)x^2+(1+\tfrac{a^3}{3}+\tfrac{4}{3}b)x^3+o(x^3)$$

2. Déterminer a et b tel que $f(x)$ soit un infiniment petit au voisinage de $x = 0$ d'ordre le plus élevé possible.

   Correction : Il faut choisir $b = -1$ et $a = 3$.

3. Quelle est la partie principale obtenue ?

   Correction : La partie principale obtenue est $-\frac{13}{2}x^2$.

4. La fonction f obtenue réalise-t-elle un extremum local en $x = 0$? Si oui, préciser sa nature ?(minimum ou maximum local).

   Correction : La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition. Par unicité du développement limité, on a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$. La partie prinicpale indique qu'au voisinage de 0 on a $f(x) - f(0) = -\frac{13}{2}x^2 + o(x^2) \leq 0$ donc il s'agit d'un maximum local.