Université de Technologie de Compiègne **MT90**

— MÉDIAN P17 : DURÉE : 1 HEURE—

Date : 03 Avril 2017

Exercice I (7 points)— Les deux parties I et II sont indépendantes.

I- On considère les propositions suivantes :

(a) $\exists x \in \mathbb{R}$; $(x+1=0$ et $x+2=0)$

(b) $(\exists x \in \mathbb{R};\ x+1=0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R};\ x+2=0)$

(c) $\exists a \in \mathbb{R}^*,\ \forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon$

(d) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R};\ |a| < \varepsilon$

1. Les propositions (a), (b), (c) et (d) sont-elles vraies ou fausses?

2. Donner leur négation.

II- Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[0,1]$ vérifiant: $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq 1$. On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante:

P: (Il y a au moins deux de ces réels qui sont distants de moins de $\dfrac{1}{n}$)

1. Ecrire à l'aide des quantificateurs une formule logique équivalente à la propriété P.

2. En déduire à partir de P la formule logique suivante

$$P' : \exists i \in \{1, \ldots, n\},\ x_i - x_{i-1} \leq \frac{1}{n}.$$

3. Ecrire à l'aide des quantificateurs la négation de P'.

4. Montrer par l'absurde la propriété P.
(**Indication**: on pourra montrer que $x_n - x_0 > 1$).

Exercice II (5 points)—

Soit f une application de l'ensemble E dans l'ensemble F. On note A et B deux parties quelconques de E et $f(A) = Imf_{|A}$ (où l'application $f_{|A}$ est la restriction de f à la partie A).

1. Vérifier que si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$.

2. Déduire que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

3. On suppose que f est injective. Montrer alors que pour toutes parties A et B de E, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

4. On suppose, dans cette question, que pour toutes parties A et B de E, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Par un raisonnement direct montrer que f est injective. (On rappelle que l'image d'une partie non vide par une application, est une partie non vide).

Exercice III (5 points)—

Soit $A \neq \emptyset$, un sous ensemble borné de $\mathbb{R}$. Posons $B = \{x \in \mathbb{R};\ -x \in A\}$, montrer que :

1. Si M est un majorant de A alors $-M$ est un minorant de B.
2. Si m est un minorant de B alors $-m$ est un majorant de A.
3. $\sup A = -\inf B$, en justifiant l'existence de la borne supérieure de A et de la borne inférieure de B.
4. $\inf A = -\sup B$, en justifiant l'existence de la borne supérieure de B et de la borne inférieure de A.

Exercice IV (6 points)—

Soient deux réels $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$. Pour U_0 et V_0 deux réels donnés on considère les suites (U_n) et (V_n) définies par les récurrences :

$$U_{n+1} = \frac{U_n + \lambda V_n}{1+\lambda}, \qquad V_{n+1} = \frac{U_n + \mu V_n}{1+\mu}.$$

1. Montrer que la suite (W_n) de terme général $W_n = V_n - U_n$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{\mu - \lambda}{(1+\mu)(1+\lambda)}$. En déduire l'expression générale pour tout n en fonction de q, U_0 et V_0.
2. Déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$.
3. On suppose que $U_0 \neq V_0$, montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes si et seulement si $\mu \geq \lambda$.
4. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{(1+\lambda)U_0 + \lambda(1+\mu)V_0}{1+2\lambda+\lambda\mu}.$$