MT02 - Corrigé du Test 1

Exercice 1 (Barème approximatif : 5 points)

1. Soient P, Q et R trois propositions. Les équivalences suivantes sont-elles toujours vraies ?

   (a) $\big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big)$

   Correction : Ce n'est pas toujours vrai.

$$\big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big((\text{non}\, P \text{ ou } Q) \Rightarrow R\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\text{non}(\text{non}\, P \text{ ou } Q) \text{ ou } R\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big((P \text{ et non}\, Q) \text{ ou } R\big)$$
$$\big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(P \Rightarrow (\text{non}\, Q \text{ ou } R)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\text{non}\, P \text{ ou } (\text{non}\, Q \text{ ou } R)\big)$$

   Si P et R sont fausses alors $\big((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R\big)$ est faux alors que $\big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big)$ est vrai.

   (b) $\big(\text{non}\, P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\text{non}\, R \Rightarrow (Q \Rightarrow P)\big)$

   Correction :

$$\big(\text{non}\, P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(P \text{ ou } (Q \Rightarrow R)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(P \text{ ou } (\text{non}\, Q) \text{ ou } R\big)$$
$$\big(\text{non}\, R \Rightarrow (Q \Rightarrow P)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(R \text{ ou } (Q \Rightarrow P)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(R \text{ ou } (\text{non}\, Q) \text{ ou } P\big)$$

   Par commutativité du connecteur « ou », les deux propositions sont équivalentes.

2. Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Préciser si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier !

   (a) $\forall\, f \in E,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = f(y)$.

   Correction : VRAI. Il suffit de choisir $y = f(x)$.

   (b) $\forall\, f \in E,\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = f(y)$.

   Correction : FAUX. Montrons que la négation est vraie :

$$\exists\, f \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) \neq f(y).$$

   Prenons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$, on a bien

$$\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, x = y + 1 \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) = y + 1 \neq y = f(y).$$

Exercice 2 (Barème approximatif : 5 points)

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On pose $P(n) :=$« $5^n + 3$ est un multiple de 4 » et $Q(n) :=$« $5^n - 3$ est un multiple de 4 ».

   (a) Montrer que les propositions P et Q sont héréditaires sur $\mathbb{N}$.

   Correction : • Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ est vrai. Alors, on peut écrire $5^n + 3 = 4k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et

$$5^{n+1} + 3 = 5 \times 5^{n+1} + 3 = (4+1) \times 5^n + 3 = 4 \times 5^n + (5^n + 3) = 4(5^n + k).$$

Comme $5^n + k \in \mathbb{N}$, on en déduit que $P(n+1)$ est vraie.
• Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $Q(n)$ est vrai. Alors, on peut écrire $5^n - 3 = 4k'$ avec $k' \in \mathbb{N}$ et

$$5^{n+1} - 3 = 5 \times 5^{n+1} - 3 = (4+1) \times 5^n - 3 = 4 \times 5^n + (5^n - 3) = 4(5^n + k').$$

Comme $5^n + k' \in \mathbb{N}$, on en déduit que $Q(n+1)$ est vraie.
• Les deux propriétés P et Q de la variable n sont héréditaire sur $\mathbb{N}$.

(b) Justifier que la proposition « $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ » est vraie.
Correction : On vérifie que $P(0)$ est vrai :

$$5^0 + 3 = 1 + 3 = 4 \text{ qui est bien un multiple de } 4.$$

Un raisonnement par récurrence permet de déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 5^n + 3$ est un multiple de 4.

(c) Justifier que la proposition « $\exists n \in \mathbb{N},\ Q(n)$ » est fausse.
Correction : On raisonne par l'absurde.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $5^{n_0} - 3$ soit un multiple de 4.
Alors, sachant que $5^{n_0} + 3$, l'est aussi, on aurait

$$(5^{n_0} + 3) - (5^{n_0} - 3) = 6 = 4k'' \text{ avec } k \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \frac{3}{2} \in \mathbb{N}.$$

C'est impossible. Donc, $\forall n \in \mathbb{N},\ 5^n - 3$ n'est pas un multiple de 4.

2. Soient A, B, C des sous ensembles d'un ensemble E quelconque.
Montrer que la fonction indicatrice de $(A \cup B) \setminus (B \cap C)$ est égale à $\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_B \times \mathbf{1}_C$.
Correction : Trouver

$$\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B \text{ et } \mathbf{1}_{B\cap C} = \mathbf{1}_B \times \mathbf{1}_C$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{(A\cup B)\setminus(B\cap C)} &= \mathbf{1}_{A\cup B} - \mathbf{1}_{A\cup B} \times \mathbf{1}_{B\cap C} \\
&= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B - (\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B) \times \mathbf{1}_B \times \mathbf{1}_C \\
&= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B \cancel{- \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B \times \mathbf{1}_C} - (\mathbf{1}_B)^2 \times \mathbf{1}_C \cancel{+ \mathbf{1}_A \times (\mathbf{1}_B) \times \mathbf{1}_C} \\
&= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_B \times \mathbf{1}_C.
\end{aligned}$$

Exercice 3 (Barème approximatif : 5 points)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{3}{1 + x + x^2}$.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x-1) = f(-x)$.
Correction :

$$f(-x) = \frac{3}{1 - x + x^2}$$

$$f(x-1) = \frac{3}{1 + (x-1) + (x-1)^2} = \frac{3}{1 + x - 1 + x^2 - 2x + 1} = \frac{3}{1 - x + x^2} = f(-x)$$

2. Montrer que f n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.
   Correction : $\exists(x=0, x'=1) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = 3 = f(x')$ et $x \neq x'$.
3. Rappeler la définition de $\operatorname{Im} f$ puis montrer que $\operatorname{Im} f =]0,4]$.
   Correction : $\operatorname{Im} f = \{y \in \mathbb{R};\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x)\}$.
   On cherche alors sous quelle condition sur y l'équation $y = f(x)$ admet au moins une solution :
   $$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{1+x+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad y(1+x+x^2) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad yx^2 + yx + (y-3) = 0.$$
   Si $y = 0$ alors l'équation n'admet aucune solution (car $-3 \neq 0$).
   Dans le cas où $y \neq 0$, l'équation admet au moins une solution si le discriminant est positif ou nul :
   $$\Delta = y^2 - 4 \times y \times (y-3) = 12y - 3y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3y(4-y) \geq 0$$
   Un tableau de signe indique de choisir $y \in]0,4]$ (ne pas oublier que 0 est exclu).
4. Montrer que $f :]-\infty, -\frac{1}{2}] \to]0,4]$ est bijective et donner l'expression algébrique de $f^{-1}(x)$.
   Correction : L'équation $y = f(x)$ admet deux solutions
   $$x_1 = \frac{-y + \sqrt{12y - 3y^2}}{2y} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{12y-3y^2}}{2y} \text{ et } x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{12y-3y^2}}{2y}.$$
   Comme $y > 0$ et $\sqrt{12y-3y^2} \geq 0$ on sait que $x_1 \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$ et $x_2 \in]-\infty, \frac{1}{2}]$.
   On en déduit que $\forall\, y \in]0,4],\ \exists! x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{12y-3y^2}}{2y},\ y = f(x)$. L'application réciproque de f est définie de $]0,4]$ dans $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ par $f^{-1}(y) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{12y-3y^2}}{2y}$.

Exercice 4 (Barème approximatif : 5 points)

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition avec quantificateurs de « la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ. »
   Correction : Voir le cours.
2. Compléter les pointillés par l'un des symboles suivants ($\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) :
   $$(u_n) \text{ converge} \quad \dots \quad (u_n) \text{ est bornée },$$
   puis démontrer cette proposition.
   Correction : Voir le cours.
3. On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n n$.
   (a) Peut-on extraire de (u_n) une sous-suite convergente ? Si oui, laquelle ? Sinon, justifier.
      Correction : Non. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. On sait que $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, donc $|u_{\varphi(n)}| = \varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. La suite $(u_{\varphi(n)})$ n'est pas bornée donc ne converge pas.
   (b) Peut-on extraire de (e^{u_n}) une sous-suite convergente ? Si oui, laquelle ? Sinon, justifier.
      Correction : Oui, prendre la suite des termes impairs.
      $$e^{u_{2n+1}} = e^{-(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$