MT02 - Test 1 (45 min) - P2025

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

**Exercice 1** (Barème approximatif : 5 points)

1. Soient $P$, $Q$ et $R$ trois propositions. Les équivalences suivantes sont-elles toujours vraies ?
   (a) $\big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(P \Rightarrow R\big)$
   Correction : Ce n'est pas toujours vrai.
   Si $P$ et $R$ sont vraies et $Q$ est fausse alors $\big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)\big)$ est fausse alors que $\big(P \Rightarrow R\big)$ est vraie.
   (b) $\big((P \Rightarrow Q) \text{ ou } (Q \Rightarrow R)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\big(Q \Rightarrow P\big) \text{ ou } \big(R \Rightarrow Q\big)\big)$
   Correction : C'est toujours vrai.
   $\big((P \Rightarrow Q) \text{ ou } (Q \Rightarrow R)\big) \Leftrightarrow \big((\text{non } P) \text{ ou } Q\big) \text{ ou } \big((\text{non } Q) \text{ ou } R\big)$,
   $\big((Q \Rightarrow P) \text{ ou } (R \Rightarrow Q)\big) \Leftrightarrow \big((\text{non } Q) \text{ ou } P\big) \text{ ou } \big((\text{non } R) \text{ ou } Q\big)$.
   Les deux propositions sont toujours vraies (tautologiques) donc elles sont équivalentes.

2. Préciser si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier !
   (a) $\forall\, z \in \mathbb{R},\ \exists\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y + 1 = z \text{ et } 2x - y = z.$
   Correction : La proposition est fausse. On justifie que la négation est vraie :
   $$\exists\, \boxed{z = -1} \in \mathbb{R},\ \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y + 1 \neq z \text{ ou } 2x - y \neq z.$$
   En effet, en sommant les égalités $x^2+y+1 = -1$ et $2x-y = -1$, on obtient $(x+1)^2 = -2$ ce qui est absurde. Donc $x^2 + y + 1 \neq -1$ ou $2x - y \neq -1$.
   (b) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, (y, z) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y + 1 = z \text{ et } 2x - y = z.$
   Correction : La proposition est toujours vraie. Il s'agit de résoudre le système d'inconnues $(y, z)$ :
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} -y + z & = & x^2 + 1 \\ y + z & = & 2x \end{array} \right.$$
   $$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, \boxed{y = -\frac{(x-1)^2}{2}} \in \mathbb{R},\ \exists\, \boxed{z = \frac{(x+1)^2}{2}} \in \mathbb{R},\ x^2 + y + 1 = z \text{ et } 2x - y = z.$$

**Exercice 2** (Barème approximatif : 5 points)
Soient $f$ et $g$ deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\vec{y} = (y_1, y_2)$ les éléments de $\mathbb{R}^2$.
On définit l'application $h$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ par $h(x) = \big(f(x), g(x)\big)$.

1. Écrire, à l'aide des quantificateurs, la définition de « $h$ est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ ».
   Correction : $\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, \big(h(x) = h(x') \Rightarrow x = x'\big)$.
2. Soit $P$ :=« $f$ injective **ou** $g$ injective $\ \Rightarrow\ $ $h$ injective ».
   Écrire la négation de la réciproque de $P$.

Correction : L'application $h$ est injective sur $\mathbb{R}$ alors que les applications $f$ et $g$ ne sont pas injectives sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la réciproque de $P$ est fausse dans le cas où $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 + x$.

   Correction : • L'application $f$ n'est pas injective : $f(1) = f(-1) = 1$.
   • L'application $g$ n'est pas injective : $g(0) = g(-1) = 0$.
   • L'application $h$ est injective. Soit on démontre la définition avec quantificateurs :

   $$h(x) = h(x') \Rightarrow x^2 = (x')^2 \text{ et } x^2 + x = (x')^2 + x' \Rightarrow x^2 + x = x^2 + x' \Rightarrow x = x'$$

   Soit pour $\vec{y} \in \mathbb{R}^2$, on montre que le système $h(x) = \vec{y}$ admet au plus une solution :

   $$h(x) = y \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 & = & y_1 \\ x^2 + x & = & y_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 & = & y_1 \\ x & = & y_2 - y_1 \end{array} \right.$$

   On en déduit que si $(y_2 - y_1)^2 \neq y_1$ alors le système n'admet aucune solution.
   Et si $(y_2 - y_1)^2 = y_1$ alors le système admet une unique solution $x = y_2 - y_1$. Comme l'équation admet 0 ou 1 solution, l'application $h$ est bien injective.

4. Écrire, à l'aide des quantificateurs, la négation de « $h$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ ».

   Correction : $\exists \vec{y} \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R},\ \vec{y} \neq h(x)$.

5. On suppose que $f$ et $g$ sont bijectives. Montrer que $h$ n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$.

   Correction : On montrer que la négation est vraie. On peut écrire

   $$\exists \vec{y} = (f(0), g(1)) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, \vec{y} \neq h(x).$$

   En effet, $h(x) = \vec{y} \Rightarrow f(x) = f(0)$ et $g(x) = g(1) \Rightarrow x = 0$ et $x = 1$ ce qui est absurde.

**Exercice 3** (Barème approximatif : 4 points)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) :=$« $7^n - 2^{n+2}$ est un multiple de 5 » et $Q(n) :=$« $7^n + 2^{n+2}$ est un multiple de 5 ».

1. Montrer que les propositions $P$ et $Q$ sont héréditaires sur $\mathbb{N}$.

   Correction : • Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $P(n)$ est vrai. Alors, on peut écrire $7^n - 2^{n+2} = 5k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et

   $$7^{n+1} - 2^{n+3} = 7 \times 7^n - 2 \times 2^{n+2} = (5+2) \times 7^n - 2 \times 2^{n+2} = 5 \times 7^n + 2(7^n - 2^{n+2}) = 5(7^n + k).$$

   Comme $7^n + k \in \mathbb{N}$, on en déduit que $P(n+1)$ est vraie.
   • Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $Q(n)$ est vrai. Alors, on peut écrire $7^n + 2^{n+2} = 5k'$ avec $k' \in \mathbb{N}$ et

   $$7^{n+1} + 2^{n+3} = 7 \times 7^n + 2 \times 2^{n+2} = (5+2) \times 7^n + 2 \times 2^{n+2} = 5 \times 7^n + 2(7^n + 2^{n+2}) = 5(7^n + k').$$

   Comme $7^n + k' \in \mathbb{N}$, on en déduit que $Q(n+1)$ est vraie.
   • Les deux propriétés $P$ et $Q$ de la variable $n$ sont héréditaires sur $\mathbb{N}$.

2. Démontrer la proposition « $\forall n \in \mathbb{N},\ 7^n + 2^{n+2}$ est un multiple de 5 ».

   Correction : On vérifie que $Q(0)$ est vrai :

   $$7^0 + 2^2 = 1 + 4 = 5 \text{ qui est bien un multiple de } 5.$$

   Un raisonnement par récurrence permet de déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 7^n + 2^{n+2}$ est un multiple de 5.

3. Démontrer par l'absurde la proposition « $\forall n \in \mathbb{N},\ 7^n - 2^{n+2}$ n'est pas un multiple de 5 ».
   Correction : On raisonne par l'absurde.
   Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $7^{n_0} - 2^{n_0+2}$ soit un multiple de 5.
   Alors, sachant que $7^{n_0} + 2^{n_0+2}$, l'est aussi, on aurait

$$(7^{n_0} + 2^{n_0+2}) - (7^{n_0} - 2^{n_0+2}) = 2^{n_0+3} = 5k''.$$

   Cela implique que 5 divise 2 ce qui est impossible.
   Donc, $\forall n \in \mathbb{N},\ 7^n - 2^{n+2}$ n'est pas un multiple de 5.

**Exercice 4** (Barème approximatif : 6 points)

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition avec quantificateurs de « la suite $(u_n)$ converge vers $\ell$ ».
   Correction : voir le cours.
2. Montrer, à l'aide de la définition, que $\lim_{n \to +\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) = 0$.
   Correction : On pose $\ell = 0$ dans la définition à démontrer.
   Soit $\varepsilon > 0$. On résout l'inéquation $|u_n| < \varepsilon$.
   Tout d'abord, on remarque $\ln(1 + \frac{1}{n}) > 0$ car $1 + \frac{1}{n} > 1$. On a les équivalences suivantes :

$$|u_n| < \varepsilon \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < e^{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < e^{\varepsilon} - 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{e^{\varepsilon} - 1}.$$

   On pose $N = E(\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}) + 1 \geq 0$. Ainsi, par définition de la fonction partie entière, on a

$$n > N \Rightarrow n > E\left(\frac{1}{e^{\varepsilon} - 1}\right) + 1 > \frac{1}{e^{\varepsilon} - 1} \Rightarrow |u_n| < \varepsilon.$$

   La convergence de $(u_n)$ vers $\ell = 0$ est démontrée.
3. Soit $(v_n)$ une suite réelle. Compléter les pointillés par l'un des symboles suivants ($\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) :

$$(v_{2n}) \text{ et } (v_{2n+1}) \text{ convergent } \quad \dots \quad (v_n) \text{ converge.}$$

   Correction : il s'agit de $\boxed{\Leftarrow}$ car ce n'est pas écrit « $(v_{2n})$ et $(v_{2n+1})$ convergent vers la même limite ».
4. Soit $(v_n)$ la suite définie pour $n \geq 1$ par $v_{2n} = \ln(1 + \frac{1}{n})$ et $v_{2n+1} = \dfrac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$.
   (a) La suite $(v_n)$ est-elle convergente ? (Justifier votre réponse).
      Correction : La suite $(v_n)$ diverge car les deux suites extraites ne convergent pas vers la même limite : $v_{2n} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ et $v_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\to} -1$ (voir TP3).
   (b) La suite $(v_{n+n^2})$ est-elle convergente ? (Justifier votre réponse).
      Correction : on étudie la parité de $n + n^2$ :

$$1 + 1^2 = 2,\ 2 + 2^2 = 6,\ 3 + 3^2 = 12,\ 4 + 4^2 = 20,\ 5 + 5^2 = 30,$$

      L'indice $n + n^2 = n(n + 1)$ est pair puisqu'il s'agit d'un produit d'entiers consécutifs. Donc la suite $(v_{n+n^2})$ converge vers 0.