MT02 - Test 1 (45 min) - P2025

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 (Barème approximatif : 5 points)

1. Soient P, Q et R trois propositions. Les équivalences suivantes sont-elles toujours vraies ?
   (a) $\big((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(P \Rightarrow R\big)$
   (b) $\big((P \Rightarrow Q) \text{ ou } (Q \Rightarrow R)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\big(Q \Rightarrow P\big) \text{ ou } \big(R \Rightarrow Q\big)\big)$
2. Préciser si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier !
   (a) $\forall\, z \in \mathbb{R},\ \exists\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y + 1 = z$ et $2x - y = z$.
   (b) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, (y, z) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y + 1 = z$ et $2x - y = z$.

Exercice 2 (Barème approximatif : 5 points)
Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\vec{y} = (y_1, y_2)$ les éléments de $\mathbb{R}^2$.
On définit l'application h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ par $h(x) = \big(f(x), g(x)\big)$.

1. Écrire, à l'aide des quantificateurs, la définition de « h est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ ».
2. Soit P :=« f injective **ou** g injective $\Rightarrow$ h injective ».
   Écrire la négation de la réciproque de P.
3. Montrer que la réciproque de P est fausse dans le cas où $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 + x$.
4. Écrire, à l'aide des quantificateurs, la négation de « h est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ ».
5. On suppose que f et g sont bijectives. Montrer que h n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (Barème approximatif : 4 points)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$:=« $7^n - 2^{n+2}$ est un multiple de 5 » et $Q(n)$:=« $7^n + 2^{n+2}$ est un multiple de 5 ».

1. Montrer que les propositions P et Q sont héréditaires sur $\mathbb{N}$.
2. Démontrer la proposition « $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 7^n + 2^{n+2}$ est un multiple de 5 ».
3. Démontrer par l'absurde la proposition « $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 7^n - 2^{n+2}$ n'est pas un multiple de 5 ».

Exercice 4 (Barème approximatif : 6 points)

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition avec quantificateurs de « la suite (u_n) converge vers ℓ ».
2. Montrer, à l'aide de la définition, que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) = 0$.
3. Soit (v_n) une suite réelle. Compléter les pointillés par l'un des symboles suivants ($\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) :
   $$(v_{2n}) \text{ et } (v_{2n+1}) \text{ convergent} \quad \ldots \quad (v_n) \text{ converge.}$$
4. Soit (v_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par $v_{2n} = \ln(1 + \frac{1}{n})$ et $v_{2n+1} = \dfrac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$.
   (a) La suite (v_n) est-elle convergente ? (Justifier votre réponse).
   (b) La suite (v_{n+n^2}) est-elle convergente ? (Justifier votre réponse).