MT02 - Test 2 (45 min) - P2022

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 (Barème approximatif : (5 points)
Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2+2x+3)e^{-x}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Montrer que $f'(x) = -(x^2+1)e^{-x}$.
3. En déduire que f admet une application réciproque f^{-1} définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.
4. Sachant que $f(0)=3$, calculer $(f^{-1})'(3)$.

Exercice 2 (Barème approximatif : (7 points)

1. On pose $f(x) = \mathrm{Arcsin}(\frac{x}{2})$. On admet que f est bien définie de $I=[-1,1]$ dans lui même.
   (a) Montrer que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.
   (b) En déduire que $\forall\, x \in\,]-1,1[,\ \frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.
2. (a) Soit $(a,b)\in I^2$. Énoncer le théorème des accroissements finis pour la fonction f sur $[a,b]$.
   (b) En déduire que $\forall (x,x')\in I^2,\ |f(x)-f(x')| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}|x-x'|$.
   (c) Montrer que $\ell = 0$ est l'unique point fixe de f.
   (d) Démontrer que la suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$ converge vers 0.

Exercice 3 (Barème approximatif : (8 points)

1. Soit f une application définie sur un intervalle I et $a \in I$.
   Préciser sous quelle condition la fonction f admet un développement de Taylor-Young à l'ordre $n\in\mathbb{N}$ en $a\in I$. Puis donner cette formule.
2. Soit p un polynôme de degré 3 tel que pour $k=0,1,2,3$ on a $p^{(k)}(0)=2$.
   Sans calculs, donner l'expression algébrique de $p(x)$.
3. Donner la formule de Taylor-Young de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ en $a=0$ à l'ordre 3.
4. Donner la formule de Taylor-Young de la fonction $x\mapsto e^x$ en $a=0$ à l'ordre 3.
5. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ un paramètre. Pour $x \in I = \,]-\infty,1[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \alpha e^x + p(x)$.
   (a) Déterminer (en fonction de α) les constantes c_2 et c_3 de sorte
   $$\forall\, x\in I,\ f(x) = (3-\alpha) + (3-\alpha)x + c_2x^2 + c_3x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$
   (b) Pour quelle valeur de α, la fonction f est-elle un infiniment petit au voisinage de $a=0$. Préciser sa partie principale.