MT02 - Corrigé du Test 2

Exercice 1 (Barème approximatif : 7 points)

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$ fixé. Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en $a = 0$ de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$.
   Correction : Il existe une fonction ε telle que
   $$\forall x > -1, (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x), \text{ et } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

2. Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en $a = 0$ de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.
   Correction : Il existe une fonction ε telle que
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x), \text{ et } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

3. Donner la formule de Taylor-Young de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ en $a = 0$ à l'ordre 3.
   Correction : Il existe une fonction ε telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$, et $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$.

4. Soit β un paramètre réel. Pour $x \in I =]-1, +\infty[$, on pose $f(x) = (1+x)^{-2} + \cos(x) + \beta e^{-x}$.
   (a) Déterminer (en fonction de β) les constantes c_2 et c_3 de sorte que
   $$\forall x \in I,\ f(x) = (\beta+2) - (\beta+2)x + c_2x^2 + c_3x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$
   Correction :
   $$\begin{aligned} f(x) &= [1 - 2x + 3x^2 - 4x^3] + [1 - \tfrac{x^2}{2}] + \beta[1 - x + \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{6}] + x^3\varepsilon(x) \\ &= (\beta+2) - (\beta+2)x + \tfrac{5+\beta}{2}x^2 - (4 + \tfrac{\beta}{6})x^3 + x^3\varepsilon(x). \end{aligned}$$
   (b) Pour quelle valeur de β, la fonction f est-elle un infiniment petit au voisinage de $a = 0$. Préciser sa partie principale.
   Correction : Comme f est continue en $a = 0$, la fonction f est un infiniment petit au voisinage de $a = 0$ ssi $f(0) = 2 + \beta = 0$, soit $\boxed{\beta = -2}$.
   Dans ce cas la partie principale est $c_2x^2 = \frac{3}{2}x^2$.

Exercice 2 (Barème approximatif : 4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x} - x\ln(x)$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $c_1 \in]1, 3[$ tel que $f(c_1) = 0$.
   Correction : La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ (en effet $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$). On a
   $$f(1) = 1 - \ln(1) = 1 > 0 \text{ et } f(3) = \sqrt{(3)} - 3\ln(3) < \sqrt{(3)} - 3\ln(e) = \sqrt{3} - 3 < 0.$$
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c_1 \in]1, 3[,\ f(c_1) = 0$.

2. Montrer qu'il existe $c_2 \in]0, c_1[$ tel que $f'(c_2) = 0$.
   Correction : La fonction f est continue sur $[0, c_1]$ et dérivable sur $]0, c_1[$. De plus $f(0) = 0 = f(c_1)$.
   D'après le théorème de Rolle, il existe $c_2 \in]0, c_1[$ tel que $f'(c_2) = 0$.

3. La fonction f est-elle convexe ou concave ? Justifier votre réponse.
   Correction : La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. On détermine alors le signe de la dérivée seconde : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \ln(x) - 1 \Rightarrow f''(x) = -\dfrac{1}{4x\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}$. On a donc pour $x \in]0, +\infty[$, $f''(x) < 0$.
   La fonction f est concave.

4. En déduire que f admet un extremum global sur $\mathbb{R}$ dont on précisera la nature.
Correction : Comme la fonction f est concave et $f'(c_2) = 0$, on peut conclure que $f(c_2)$ est le maximum global de f sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3 (Barème approximatif : 9 points)

1. Montrer que $\forall x \in \; [0\,; +\infty[, \quad x - \frac{x^3}{3} \leq \operatorname{Arctan}(x) \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$.
Correction : On étudie le signe des dérivées premières

$$f_1'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 = \frac{1 + (1+x^2)(-1+x^2)}{1+x^2} = \frac{x^4}{1+x^2} \geq 0$$

$$\text{et } f_2'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 - x^4 = \frac{x^4}{1+x^2} - x^4 = \frac{-x^6}{1+x^2} \leq 0.$$

La fonction f_1 est croissante alors que f_2 est décroissante. On en déduit que

$$\forall x > 0, \; f_1(x) \geq f_1(0) = 0 \text{ et } f_2(x) \leq f_2(0) = 0.$$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}, & \text{si } x > 0, \\ \cos x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$

   (a) Justifier que f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\tilde{f}$ à préciser.
   Correction : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. De plus $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \cos(0) = 1$ et d'après le théorème des gendarmes : $1 - \dfrac{x^2}{3} \leq f(x) \leq 1 - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^4}{5} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$. La fonction f admet une limite en $a = 0$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. On en déduit que f est prolongeable en $a = 0$ en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}$ et définie par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$.

   (b) Montrer que $\tilde{f}$ admet un point fixe ℓ dans l'intervalle $]0, 1[$.
   Correction : On pose $g(x) = \tilde{f}(x) - x$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0, 1]$. On a $g(0) = \tilde{f}(0) - 0 = 1 > 0$ et $g(1) = \tilde{f}(1) - 1 = \frac{\pi}{4} - 1 < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\ell \in]0, 1[$, tel que $g(\ell) = 0 \Leftrightarrow \tilde{f}(\ell) = \ell$.

   (c) i. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et $\tilde{f}'(0) = 0$.
   Correction : Si $x > 0$, $-\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \dfrac{\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x} - 1}{x} \leq -\dfrac{x}{3} + \dfrac{x^3}{5}$.
   Comme $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{x}{3} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{x}{3} + \frac{x^3}{5} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = 0$. Si $x < 0$, $\dfrac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = \dfrac{\cos x - 1}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x - 0} = 0$.
   On en déduit que la limite du taux d'accroissement de $\tilde{f}$ en 0 existe et $\tilde{f}'(0) = 0$.

   ii. À l'aide de **Q1.**, montrer que $\forall x > 0$, $\frac{x}{1+x^2}(-\frac{2}{3} + \frac{2x^2}{15} - \frac{x^4}{5}) \leq f'(x) \leq \frac{x}{1+x^2}(-\frac{2}{3} + \frac{x^2}{3})$.
   Correction : Pour $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{Arctan}(x)}{x^2}$. On utilise la question 1 pour trouver l'encadrement de $f'(x)$.

$$\frac{x}{1+x^2} - (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}) \leq \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{Arctan}(x) \leq \frac{x}{1+x^2} - (x - \frac{x^3}{3})$$

$$\Rightarrow \frac{x - (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5})(1+x^2)}{1+x^2} \leq \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{Arctan}(x) \leq \frac{x - (x - \frac{x^3}{3})(1+x^2)}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}-\frac{x^7}{5}}{1+x^2} \leq \frac{x}{1+x^2} - \mathrm{Arctan}(x) \leq \frac{-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{3}}{1+x^2}$$

Il reste à diviser par x^2.

iii. En déduire que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Correction : Il s'agit de vérifier si $\lim_{x\to 0} \tilde{f}'(x) = \tilde{f}'(0)$.

D'après le théorème des gendarmes appliqué à l'encadrement de la question (ii), on en déduit que $\lim_{x\to 0^+} \tilde{f}'(x) = 0$.

A gauche, on a $\lim_{x\to 0^-} \tilde{f}'(x) = -\sin(0) = 0$. Les limites à gauche et à droite coincident donc la limite existe et est bien égale à $\tilde{f}'(0)$. La fonction dérivée de $\tilde{f}$ est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$. On dit que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

(d) Déterminer $\lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x)}{x}$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{x}$. En déduire que $\tilde{f}$ n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Correction : $\lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x)}{x} = -\cos(0) = -1$ et $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{x} = -\frac{2}{3}$. Les limites à gauche et à droite étant différentes, le taux d'accroissement de la fonction $\tilde{f}'$ en 0 n'existe pas. La fonction $\tilde{f}$ n'est pas deux fois dérivable en 0. La fonction $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

(e) On admet que $\forall\, x \geq 0, |\tilde{f}'(x)| \leq K \approx 0.292$.

i. Montrer que $\forall\,(x,y) \in [0,+\infty[,\ |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq K|x-y|$.

Correction : On applique l'égalité des accroissements finis à f entre $x \in [0,+\infty[$ et $x' \in [0,+\infty[$.

- Si $x = x'$, on a $|f(x) - f(x')| = 0 = K|x-x'|$. L'égalité entraîne l'inégalité.
- Pour $x \neq x'$, sans perte de généralité, on peut supposer que $x < x'$. L'application f est continue sur $[x,x']$ et dérivable sur $]x,x'[$ donc il existe $c \in]x,x'[,\ f(x) - f(x') = f'(c)(x-x')$. En valeur absolue, cela entraîne

$$|f(x) - f(x')| = |f'(c)||x-x'| \leq K|x-x'|.$$

ii. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \tilde{f}(u_n)$, avec $u_0 \geq 0$ fixé, converge vers ℓ.

Correction : Démonstration vue en cours sachant que $0 < K < 1$.

(i) étape 1 : on pose $x = u_n$ et $y = \ell$ dans **2.e)i)** et on obtient
$|f(u_n) - f(\ell) = |u_{n+1} - \ell|| \leq K|u_n - \ell|$.

(ii) étape 2 : on montre par récurrence que $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq K^n|u_0 - \ell|}$

Initialisation à $n = 0$: on a $|u_0 - \ell| = K^0|u_0 - \ell|$, l'égalité entraîne l'inégalité.
Hérédité : Soit $n \geq 0$, tel que $|u_n - \ell| \leq K^n|u_0 - \ell|$. D'après l'étape 1 on a
$|u_{n+1} - \ell| \leq K|u_n - \ell| \underset{\text{par Hyp. Réc.}}{\Rightarrow} |u_{n+1} - \ell| < K \times K^n|u_0 - \ell| = K^{n+1}|u_0 - \ell|$.
La proposition est vraie au rang $n+1$.

(iii) étape 3 : La suite de terme général $K^n|u_0 - \ell|$ est une suite géométrique de raison $0 < K < 1$ donc elle converge vers 0. D'après le corollaire 1 du théorème des gendarmes, la suite $u_n - \ell \underset{n\to\infty}{\to} 0$. De façon équivalente, $u_n \underset{n\to\infty}{\to} \ell$.