Médian MT90 - P2020

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 14 points)

1. Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 0$ par $u_n = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3$.
   (a) Montrer par récurrence sur $n \geq 0$ que $u_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
   (b) On admet que pour tout $n \geq 0$, on a $n < 2^n$.
   En déduire que pour tout $n \geq 0$, on a $\sqrt{u_n} \in \mathbb{N}$ et $\sqrt{u_n} < 4^n$.

2. Soit (v_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{(-1)^n + \sqrt{u_n}}{5^n}$.
   (a) Calculer v_0, v_1 et v_2.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $0 \leq v_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$.
   (c) En déduire que la suite (v_n) converge vers une limite ℓ à préciser.
   (On ne demande pas d'utiliser la définition avec quantificateurs dans cette question).
   (d) Montrer que la suite extraite (v_{2n}) est strictement décroissante.
   (e) On définit $A = \{v_n, \, n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{v_{2n}, \, n \in \mathbb{N}\}$.
      i. Montrer que A admet un plus petit élément et un plus grand élément, à préciser.
      ii. Montrer que B admet une borne inférieure.
      iii. (**Hors barème)** Rappeler la caractérisation de la borne inférieure de B à l'aide des quantificateurs.
      iv. Utiliser cette caractérisation pour démontrer que $\inf B = \ell$.
      v. Peut-on dire que ℓ est le plus petit élément de B ?

3. On définit les suites (s_n) et (t_n), pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{u_k}} \qquad \text{et} \qquad t_n = s_n + \frac{2}{n},$$

   où on rappelle que $u_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
   (a) Montrer que les suites (s_n) et (t_n) sont adjacentes.
   (b) Montrer que pour tout $k \geq 1$, on a $\frac{1}{\sqrt{u_k}} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}$.
   (c) En déduire que (s_n) et (t_n) convergent vers 2.
   (Indication : simplifier l'expression de (s_n).)

Exercice 2 (Barème approximatif : 8 points)
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Soient P et Q deux propositions. Les propositions suivantes sont-elles toujours vraies ?
   (a) $(P \text{ et } Q) \Rightarrow (P \text{ ou } \ \text{non}\, Q)$.
   (b) $(P \text{ ou } \ \text{non}\, Q) \Rightarrow (P \text{ et } Q)$.

2. Soient f et g deux fonctions définies par

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1-3x^2}{x^2-2}\ .$$

   (a) Déterminer les domaines de définition des fonctions f et g. On les notera respectivements D_f et D_g.
   (b) i. Écrire la négation de la proposition "g est injective".
       ii. Montrer que g n'est pas injective.
   (c) On admet que $\operatorname{Im} f \subset D_g$ et $\operatorname{Im} g \subset D_f$. Déterminer les expressions algébriques de $g \circ f$ et $f \circ g$.
   (d) On définit la fonction h sur $D_g \cap [0, +\infty[$ et à valeurs dans $\operatorname{Im} h$ par $h(x) = g(x)$.
       i. Que peut-on en déduire sur f et h ?
       ii. Préciser $\operatorname{Im} h$.

3. Soit E un ensemble et soient A, B et C trois sous-ensembles de E.
   Montrer que

$$A \cap C = B \quad \Rightarrow \quad (A \backslash C) \cup B = A.$$