Médian MT90 - P2021

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 10 points) **CHANGER DE COPIE**
Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. Soient P, Q et R trois propositions. Parmi les implications suivantes, laquelle (ou lesquelles) est (sont) toujours vraie(s) ?
   (a) $\Big(\big(P \text{ et non}\, Q\big) \text{ ou } R\Big) \;\Rightarrow\; \big(P \Rightarrow R\big)$.
   (b) $\Big(\big(P \text{ et non}\, Q\big) \text{ ou } R\Big) \;\Rightarrow\; \big(Q \Rightarrow R\big)$.
   (c) $\Big(\big(P \text{ et non}\, Q\big) \text{ ou } R\Big) \;\Rightarrow\; \big(\text{non}\, R \Rightarrow P\big)$.
   (d) $\Big(\big(P \text{ et non}\, Q\big) \text{ ou } R\Big) \;\Rightarrow\; \big(\text{non}\, R \Rightarrow Q\big)$.

2. Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose $A := \{f \in E;\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0\}$ et $B := \{f \in E;\ \forall x \in \mathbb{R},\ f \circ f(x) \geq 0\}$.
   (a) Justifier que $A \neq \varnothing$.
   (b) Montrer que $A \subset B$.
   (c) Soit g, la fonction définie par $g(x) = \cos(\frac{\pi}{3}x)$. Montrer que $g \in B \backslash A$.
   (d) Montrer que
   $$f \in B \quad \text{et} \quad f \text{ est surjective} \quad \Rightarrow \quad f \in A.$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les propositions
   $P(n) :=$« $4^n - 1$ est un multiple de 3 » et $Q(n) :=$« $4^n + 1$ est un multiple de 3 ».
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$ et $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$.
   (b) Peut-on conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n - 1$ est un multiple de 3 ?
      i. Si oui, justifier.
      ii. Sinon, existe-il $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0, 4^n - 1$ est un multiple de 3 ?
   (c) Peut-on conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 1$ est un multiple de 3 ?
      i. Si oui, justifier.
      ii. Sinon, existe-il $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0, 4^n + 1$ est un multiple de 3 ?

Exercice 2 (Barème approximatif : 10 points) **CHANGER DE COPIE**
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit (w_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, par $w_n = \frac{2n+1}{1-3n}$.
   (a) Calculer w_1, w_2 et w_3.
   (b) Étudier la monotonie de la suite (w_n).
   (c) Montrer, à l'aide de la définition avec quantificateurs, que (w_n) converge vers une limite ℓ à préciser.
   (d) On définit $A = \{w_n,\, n \in \mathbb{N}^*\}$.
      i. Montrer que A admet un plus petit élément à préciser.
      ii. Justifier que A admet une borne supérieure.
      iii. Rappeler la caractérisation de la borne supérieure de A à l'aide des quantificateurs.
      iv. Utiliser cette caractérisation pour démontrer que $\sup A = \ell$.
      v. Peut-on dire que ℓ est le plus grand élément de A ?

2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite monotone convergeant vers 0 et $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par

$$\begin{cases} v_0 \neq 0 \\ v_{n+1} = -v_n \end{cases}.$$

   On définit la série S_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_k.$$

   Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.