Corrigés des Finaux MT91 - A2014/A2016

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 - A14

1. (a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que

$$\int \frac{1}{x^2-2x+3}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C\ , \quad C \in \mathbb{R}\ .$$

(Indication : utiliser la forme canonique de $f(x) = x^2 - 2x + 3$.)

Correction : Écrire $f(x) = (x-1)^2 + 2$, puis

$$\frac{1}{x^2-2x+3} = \frac{1}{(x-1)^2+2} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}(x-1)^2+1\right)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(\frac{x-1}{\sqrt{2}})^2+1}\ .$$

On en déduit que

$$\int \frac{1}{x^2-2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\frac{x-1}{\sqrt{2}})^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,(\sqrt{2}du) = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,du\ ,$$

où on a posé le changement de variable suivant $u = \frac{x-1}{\sqrt{2}}$ avec $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow dx = \sqrt{2}du$.
Finalement,

$$\int \frac{1}{x^2-2x+3}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Arctan}\,u + C = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Arctan}\left(\tfrac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C\ , \quad C \in \mathbb{R}\ .$$

(b) Déterminer la forme générale des primitives de la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{x-3}{x^2-2x+3}\ .$$

(Indication : déterminer deux nombres réels α et β tels que $x - 3 = \alpha f'(x) + \beta$.)

Correction : On calcule $f'(x) = 2x - 2$. Écrire $x - 3 = \frac{1}{2}f'(x) - 2$, puis

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-3}{x^2-2x+3}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+3}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2-2x+3}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+3) - \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\tfrac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C\ , \\
&= \ln\sqrt{x^2-2x+3} - \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\tfrac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C\ , \quad C \in \mathbb{R}\ .
\end{aligned}$$

2. Soit $F(x) = \dfrac{x^3-x^2+x-3}{(x+1)(x^2-2x+3)}$.

(a) Décomposer la fraction F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Correction : Soient $P(x) = x^3 - x^2 + x - 3$ (le numérateur) et $Q(x) = x^2 - 2x + 3$ (le dénominateur).

• On a $\deg P = 3$ et $\deg Q = 3$. Comme $\deg P = \deg Q$, on doit effectuer une division euclidienne pour déterminer la partie entière de F.
On développe Q : $Q(x) = (x+1)(x^2 - 2x + 3) = x^3 - x^2 + x + 3$.

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & x^3 & - & x^2 & + & x & - & 3 & & x^3 - x^2 + x + 3 \\ \cline{10-10}
- & (x^3 & - & x^2 & + & x & + & 3) & & \\
 & & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & - & 6 & &
\end{array}$$

On trouve $P(x) = Q(x) - 6$ donc $F(x) = 1 + \dfrac{-6}{Q(x)}$. Dans la seconde partie on décompose $\dfrac{-6}{Q(x)}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

• On vérifie que chaque facteur de Q est irréductible : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 = -8 < 0$ donc $x^2 - 2x + 3$ est irréductible. Ensuite on écrit :

$$\frac{-6}{(x+1)(x^2 - 2x + 3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx + c}{x^2 - 2x + 3} \, ,$$

où a, b et c sont trois constantes réelles à déterminer. On réduit cette expression au même dénominateur et on identifie les numérateurs pour obtenir

$$a(x^2 - 2x + 3) + (bx + c)(x + 1) = x^2(a + b) + x(-2a + b + c) + (3a + c) = -6 \, .$$

On résoud le système $\left\{\begin{array}{lcl} a + b & = & 0 \\ -2a + b + c & = & 0 \\ 3a + c & = & -6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -1 \\ b & = & 1 \\ c & = & -3 \end{array}\right.$.

<u>Conclusion :</u> $F(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x - 3}{x^2 - 2x + 3}$.

(b) En déduire que la forme générale des primitives de F est

$$H(x) = x - \ln|x + 1| + \ln\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x - 1}{\sqrt{2}}\right) + C \, , \quad C \in \mathbb{R} \, .$$

Correction : On utilise les résultats des questions précédentes.

$$\begin{aligned}
\textstyle\int F(x)\,dx &= \int 1 \times dx \; - \; \int \frac{1}{x+1}\,dx \; + \; \int \frac{x - 3}{x^2 - 2x + 3}\,dx \\
&= x - \ln|x + 1| + \ln\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x - 1}{\sqrt{2}}\right) + C \, , \quad C \in \mathbb{R} \, .
\end{aligned}$$

3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle linéaire du 1er ordre suivante

$$(E_0) \qquad\qquad y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \, , \quad x \in I \, ,$$

où a et b sont deux fonctions définies et continues sur I.

(a) Démontrer que la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E_0) est $y_h(x) = C\exp(A(x))$ où C est une constante réelle et A est une fonction à préciser.

Correction : L'équation homogène associée à (E_0) est $y'(x) = a(x)y(x)$.
La fonction a est continue sur I donc elle admet une primitive notée A définie et dérivable sur I. En particulier, on a $\forall x \in I\,,\ A'(x) = a(x)$. On a les équivalence suivantes :

$$\begin{aligned}
y'(x) = a(x)y(x) &\Leftrightarrow \quad y'(x)\exp(-A(x)) = a(x)y(x)\exp(-A(x)) \\
&\Leftrightarrow \quad y'(x)\exp(-A(x)) - a(x)y(x)\exp(-A(x)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(y(x)\exp(-A(x))\Big) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad y(x)\exp(-A(x)) = C\,, \quad C \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad y(x) = C\exp(A(x))\,, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

(b) Pour tout $x \in I$, on pose $y_p(x) = \varphi(x)\exp(A(x))$ où φ est une fonction dérivable sur I. Démontrer que :

$$y_p \text{ est une solution particulière de } (E_0) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) = \int b(x)\exp(-A(x))\,dx\ .$$

Correction : On calcule $y_p'(x) = \varphi'(x)\exp(A(x)) + a(x)\varphi(x)\exp(A(x))$ et on remplace y_p' et y_p par leurs expressions dans l'équation (E_0) avec second membre.

$$\begin{aligned}
& y_p \text{ est une solution particulière de } (E_0) \\
\Longleftrightarrow\quad & y_p'(x) = a(x)y_p(x) + b(x) \\
\Longleftrightarrow\quad & \varphi'(x)\exp(A(x)) + a(x)\varphi(x)\exp(A(x)) = a(x)\varphi(x)\exp(A(x)) + b(x) \\
\Longleftrightarrow\quad & \varphi'(x)\exp(A(x)) = b(x) \\
\Longleftrightarrow\quad & \varphi'(x) = \frac{b(x)}{\exp(A(x))} \\
\Longleftrightarrow\quad & \varphi(x) = \int b(x)\exp(-A(x))\,dx\ .
\end{aligned}$$

4. Soit $I =]-1\,;+\infty[$. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E_1) \qquad y'(x) - \frac{1}{x+1}y(x) = \frac{x^3 - x^2 + x - 3}{x^2 - 2x + 3}\,, \quad x \in I\ .$$

(a) Donner la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E_1). *(Penser à simplifier l'expression de y_h).*
Correction : Il faut commencer par isoler y' : on a

$$y'(x) = \frac{1}{x+1}y(x) + \frac{x^3 - x^2 + x - 3}{x^2 - 2x + 3}\ .$$

Ici on a $a(x) = \dfrac{1}{x+1}$ La fonction a est continue sur $I =]-1\,;+\infty[$ donc elle admet une primitive A dérivable sur I et définie par $A(x) = \ln|x+1| = \ln(x+1)$.
D'après 3a) la forme générale des solutions de l'équation homogène est

$$y_h(x) = C\exp\big(\ln(x+1)\big) = C(x+1)\,, \quad C \in \mathbb{R}\ .$$

(b) Déterminer une solution particulière de (E_1).

Correction : D'après la question 3b, une solution particulière de (E_1) est de la forme $y_p(x) = \varphi(x)(x+1)$ où $\varphi(x) = \displaystyle\int \frac{x^3 - x^2 + x - 3}{(x+1)(x^2 - 2x + 3)}\, dx$. D'après la question 2b, on en déduit qu'une solution particulière est

$$y_p(x) = (x+1)\Big(x - \ln|x+1| + \ln\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\tfrac{x-1}{\sqrt{2}}\right)\Big)\ .$$

(c) En déduire la forme générale des solutions de (E_1).

Correction : La forme générale des solutions de l'équation différentielle (E_1) est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (x+1)\Big(C + x - \ln|x+1| + \ln\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}\left(\tfrac{x-1}{\sqrt{2}}\right)\Big)\ , \quad C \in \mathbb{R}\ .$$

Exercice 1 - A15

1. À l'aide d'un changement de variable, calculer

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2 - 2t + 4}\, dt \, .$$

(Indication : utiliser la forme canonique de $t^2 - 2t + 4$.)

Correction : Écrire $t^2 - 2t + 4 = (t-1)^2 + 3$, puis

$$\frac{1}{t^2 - 2t + 4} = \frac{1}{(t-1)^2 + 3} = \frac{1}{3\big(\frac{1}{3}(t-1)^2 + 1\big)} = \frac{1}{3}\frac{1}{(\frac{t-1}{\sqrt{3}})^2 + 1} \, .$$

On en déduit que

$$\int_1^x \frac{1}{t^2 - 2t + 4}\, dt = \frac{1}{3}\int_1^x \frac{1}{(\frac{t-1}{\sqrt{3}})^2 + 1}\, dt = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{x-1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+u^2}\,(\sqrt{3}du) = \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{x-1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+u^2}\, du \, ,$$

où on a posé le changement de variable suivant $u = \frac{t-1}{\sqrt{3}}$. On calcule les nouvelles bornes $t = 1 \Leftrightarrow u = 0$, $t = x \Leftrightarrow u = \frac{x-1}{\sqrt{3}}$ puis $\frac{du}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow dt = \sqrt{3}du$. Finalement,

$$\int_1^x \frac{1}{t^2 - 2t + 4}\, dt = \Big[\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}\, u\Big]_0^{\frac{x-1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}\big(\tfrac{x-1}{\sqrt{3}}\big) \, .$$

2. Soit g la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par

$$g(x) = \frac{18 - 3x}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \, .$$

(a) Décomposer la fraction g en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Correction : Le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur. Le dénominateur est déja factorisé en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. On commence par écrire

$$g(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{bx + c}{x^2 - 2x + 4} \, .$$

En remettant tout au même dénominateur on obtient

$$g(x) = \frac{a(x^2 - 2x + 4) + (x+2)(bx + c)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{x^2(a+b) + x(-2a + 2b + c) + 4a + 2c}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \, .$$

On obtient le système d'équation

$$\left\{\begin{array}{c} a + b = 0 \\ -2a + 2b + c = -3 \\ 4a + 2c = 18 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} b = -a \\ -2a + 2(-a) + (9 - 2a) = -3 \\ c = 9 - 2a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} b = -2 \\ a = 2 \\ c = 5 \end{array}\right.$$

On conclut

$$g(x) = \frac{2}{x+2} + \frac{-2x + 5}{x^2 - 2x + 4} \, .$$

(b) En déduire qu'une primitive de g est, à une constante réelle près,

$$G(x) = 2\ln(x+2) - \ln(x^2 - 2x + 4) + \sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) \, .$$

Correction : On commence par réécrire le second terme de la façon suivante

$$\frac{-2x+5}{x^2-2x+4} = \frac{-(2x-2)+3}{x^2-2x+4} = -\frac{2x-2}{x^2-2x+4} + 3\frac{1}{x^2-2x+4} .$$

On obtient , par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\int g(x)\,dx &= \int \frac{2}{x+2} - \int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2-2x+4}\,dx \\ &= 2\ln(x+2) - \ln(x^2-2x+4) + 3\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}\left(\tfrac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C_1 = G(x) + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

On ne met pas de valeur absolue car $x+2>0$ sur $]-2\,;+\infty[$.

(c) Déterminer le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $x=1$ de la fonction G.
Correction : La fonction G est dérivable en $x=1$ et $G'=g$ donc le D.L. à l'ordre 1 en $x=1$ s'écrit pour tout h tel que $x=1+h\in]-2\,;+\infty[$

$$G(1+h) = G(1) + g(1)h + h\,\varepsilon(h), \qquad \text{avec } \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\to} 0 .$$

On a $G(1)=\ln(3)$ et $g(1)=\frac{18-3}{3\times 3}=\frac{5}{3}$ donc

$$G(1+h) = \ln(3) + \frac{5}{3}h + h\,\varepsilon(h) .$$

3. Soit $I=]0\,;\pi[$. On considère l'équation différentielle suivante

$$y'(x) + \frac{\cos x}{\sin x}y(x) = g(\cos x)\ , \quad x \in I .$$

(a) Donner la forme générale des solutions y_h de l'équation homogène associée à (E_1). *(Penser à simplifier l'expression de y_h).*
Correction : L'équation homogène associée à (E_1) est $y'(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}y(x)$. On pose $a(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}$. La fonction a est définie et continue sur l'intervalle I donc elle admet une primitive qui est, à une constante réelle près,

$$A(x) = \int a(x)\,dx = -\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = -\ln(\sin x) = \ln\frac{1}{\sin x} .$$

On ne met pas de valeur absolue car $\sin x>0$ sur I. On en déduit la forme générale des solutions de l'équation homogène

$$y_h(x) = C\exp(A(x)) = C\exp(\ln\frac{1}{\sin x}) = \frac{C}{\sin x}, \quad C \in \mathbb{R} .$$

(b) On cherche une solution particulière y_p de (E_1) de la forme $y_p(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\sin x}$.
Montrer que

$$\varphi'(x) = g(\cos x)\,\sin x .$$

Correction : Il s'agit d'appliquer la méthode de la variation de la constante. On pose $y_p(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\sin x}$ où φ est une fonction dérivable à déterminer. On a

$$y_p'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\sin x} - \varphi(x)\frac{\cos x}{\sin^2 x} \ .$$

On remplace y_p et y_p' par leur expressions dans l'équation (E_1) et on obtient pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} y_p' + \frac{\cos x}{\sin x} y(x) = g(\cos x) &\Leftrightarrow \frac{\varphi'(x)}{\sin x} - \varphi(x)\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \varphi(x)\frac{\cos x}{\sin^2 x} = g(\cos x) \\ &\Leftrightarrow \frac{\varphi'(x)}{\sin x} = g(\cos x) \Leftrightarrow \varphi'(x) = g(\cos x)\,\sin x \ . \end{aligned}$$

(c) En déduire une solution particulière de (E_1).

Correction : D'après la question précédente, on obtient (à une constante réelle près) $\varphi(x) = -G(\cos x)$.

Une solution particulière de (E_1) est donc $y_p = -\frac{G(\cos x)}{\sin x}$.

(d) Donner la forme générale des solutions de (E_1).

Correction : La forme générale des solution de (E_1) est

$$y = y_p(x) + y_h(x) = \frac{C - G(x)}{\sin x}, \quad \text{avec } C \in \mathbb{R} \ .$$

(e) Déterminer l'unique solution y de (E_1) prolongeable par continuité en $x = 0$. Donner ce prolongement.

Correction : La fonction y est prolongeable par continuité en 0 si $\lim\limits_{x \to 0} y(x)$ existe. On a $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ et par continuité de G,

$$\lim_{x \to 0} C - G(\cos x) = C - G(1) = C - \ln 3 \ .$$

• Si $C - \ln 3 \neq 0$ alors y tend vers $\pm\infty$ en 0.

• Si $C = \ln 3$ alors la limite est indéterminée. La fonction y est un quotient d'infiniment petit au voisinage de $x = 0$.

On a

$$\sin x = x + x\varepsilon_1(x) \ , \quad \text{et} \quad \cos x = 1 + 0x + x\varepsilon_2(x)$$

D'après la question **2.(c)**, on a $G(\cos x) = \ln 3 + 0x + x\varepsilon_3(x)$. Finalement

$$y(x) = \frac{-0x - x\varepsilon_2(x)}{x + x\varepsilon_1(x)} = \frac{-0 - \varepsilon_2(x)}{1 + \varepsilon_1(x)}$$

et

$$\lim_{x \to 0} y(x) = 0 \ .$$

L'unique solution de (E_1) prolongeable par continuité en 0 est $y(x) = \dfrac{\ln 3 - G(\cos x)}{\sin x}$ et son prolongement en 0 est la fonction $\tilde{y}$ définie par

$$\begin{cases} \tilde{y}(x) = \dfrac{\ln 3 - G(\cos x)}{\sin x} & \text{si } x \in I, \\ \tilde{y}(0) = 0 \ . \end{cases}$$

Exercice 2 - A15
Les questions 1 et 2 sont indépendantes

Pour tout entier n, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$ et $J_n = \int_0^1 x^n\,dx$.

1. Justifier l'existence de I_n et J_n pour tout entier naturel n.
   Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$ et $x \mapsto x^n$ sont continues sur $[0\,;1]$. Ces fonctions sont donc intégrables entre 0 et 1, ce qui justifie que I_n et J_n existent.

2. Montrer que $0 \leq I_n \leq J_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0\,;1]$, on a
   $$(0 \leq x) \Rightarrow (1 \leq 1+x \text{ et } 0 \leq x) \Rightarrow \left(0 \leq \frac{1}{1+x} \leq 1\right) .$$
   En multipliant chaque membre par $x^n \geq 0$ on obtient $0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$. On en déduit que
   $$\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx \Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq J_n .$$

3. Montrer que la suite I_n converge vers 0.
   Correction : On calcule $J_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. La suite J_n converge vers 0.
   D'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) converge vers 0 également.

4. Montrer, par une intégration par partie, que
   $$I_n = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx$$
   Correction : On pose $u'(x) = x^n$ et $v(x) = \frac{1}{x+1}$. On calcule $u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $v'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$. On applique la formule
   $$\int_0^1 u'(x)v(x)\,dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx .$$
   On obtient
   $$\begin{aligned} I_n &= \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)(x+1)}\right]_0^1 - \left(\int_0^1 -\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^2}\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx . \end{aligned}$$

5. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nI_n = 1$. (*Remarque : on dit que I_n est équivalent à $\frac{1}{2n}$*.)

Correction : On a

$$2nI_n = \frac{n}{(n+1)} + \frac{2n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx$$

En reprenant les résultats des questions **2. (b)** et **(c)**, on montre que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \leq J_{n+1} = \frac{1}{n+2}$$

donc

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \text{ et } \frac{2n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx \underset{n\to+\infty}{\to} 2\times 0 = 0\,.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nI_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Exercice 1

Partie I

1. Soit F la fraction rationnelle définie sur $]-1\ ,\ 0]$ par $F(x) = \dfrac{9}{(1+x)(1-2x)^2}$.

   (a) Décomposer la fraction F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

   Correction : Le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur, donc la partie entière est nulle. Le dénominateur est déja factorisé en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. On commence par écrire

   $$F(x) = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-2x} + \frac{c}{(1-2x)^2}, \qquad \text{où } a,\ b \text{ et } c \text{ sont des constantes.}$$

   En remettant tout au même dénominateur on obtient

   $$\begin{aligned} F(x) &= \frac{a(1-2x)^2 + b(1+x)(1-2x) + c(1+x)}{(1+x)(1-2x)^2} \\ &= \frac{(4a-2b)x^2 + (-4a-b+c)x + (a+b+c)}{(1+x)(1-2x)^2}. \end{aligned}$$

   On obtient le système d'équation

   $$\left\{ \begin{array}{c} 4a-2b=0 \\ -4a-b+c=0 \\ a+b+c=9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b=2a \\ -6a+c=0 \\ 3a+c=9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b=2a \\ c=6a \\ 9a=9 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b=2 \\ c=6 \\ a=1 \end{array} \right.$$

   On conclut

   $$F(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-2x} + \frac{6}{(1-2x)^2}$$

   (b) En déduire qu'une primitive de F est, à une constante réelle près,

   $$G(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-2x}\right) + \frac{3}{1-2x}\ .$$

   Correction : On écrit

   $$F(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{-2}{1-2x} + 3 \times \left(-\frac{-2}{(1-2x)^2}\right)$$

   Les deux premiers termes sont de la forme $\frac{u'}{u}$ donc une primitive est $\ln|u|$ et le troisième terme est de la forme $-\frac{u'}{u^2}$ donc une primitive est $\frac{1}{u}$. On en déduit que sur l'intervalle $]-1\ ,\ 0]$, une primitive de F est, à une constante réelle près,

   $$G(x) = \ln(1+x) - \ln(1-2x) + \frac{3}{1-2x} = \ln\left(\frac{1+x}{1-2x}\right) + \frac{3}{1-2x}$$

2. (a) Linéariser $\cos^3 x$.

Correction : On utilise la formule d'Euler $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$.

$$\begin{aligned}
(\cos x)^3 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 &= \frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right)\\
&= \frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{8}+\frac{3e^{ix}+3e^{-ix}}{8}\\
&= \frac{2\cos(3x)}{8}+\frac{3\times 2\cos x}{8}\\
&= \frac{\cos(3x)}{4}+\frac{3\cos x}{4}\ .
\end{aligned}$$

(b) En déduire que $1+\cos 3x = P(\cos x)$, où le polynôme P est défini par $P(x) = (1+x)(1-2x)^2$.

Correction : D'après la question 2a), on a

$$(\cos x)^3 = \frac{\cos(3x)}{4}+\frac{3\cos x}{4} \Leftrightarrow \cos(3x) = 4(\cos x)^3 - 3\cos x$$

On obtient alors $1+\cos(3x) = P(\cos x)$, où $P(x) = 4x^3-3x+1$. Il reste à vérifier que $P(x) = (1+x)(1-2x)^2$. Pour cela on développe l'expression :

$$(1+x)(1-2x)^2 = (1+x)(1-4x+4x^2) = 1+x-4x-4x^2+4x^3 = 1-3x+4x^3 = P(x)\ .$$

(c) À l'aide du changement de variable $u = \cos t$, calculer

$$\varphi(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin t}{1+\cos 3t}dt\ , \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}\, ,\ \pi\right[\ .$$

Correction : • $u = \cos t \Rightarrow du = -\sin t\, dt$
• $t = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
• $t = x \Leftrightarrow u = \cos x$
On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\sin t}{1+\cos 3t}dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1}{P(\cos t)}(-\sin t)\, dt = \int_0^{\cos x}\frac{1}{P(u)}du\\
= -\left[\frac{1}{9}G(u)\right]_0^{\cos x} = -\frac{1}{9}G(\cos x)+\frac{1}{9}G(0) = -\frac{1}{9}G(\cos x)+\frac{1}{3}\ .
\end{aligned}$$

Partie II

Soit $I = [\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi[$. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E_1) \qquad y'(x) + \frac{3\sin 3x}{1+\cos 3x} y(x) = \sin x\ , \quad x \in I\ .$$

1. Donner la forme générale des solutions y_h de l'équation homogène associée à (E_1). *(Penser à simplifier l'expression de y_h).*

   Correction : Il faut commencer par isoler y' : on a

   $$y'(x) = -\frac{3\sin 3x}{1+\cos 3x} y(x) + \sin x\ .$$

   Ici on a $a(x) = -\frac{3\sin 3x}{1+\cos 3x}$ La fonction a est continue sur $I = [\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi[$ donc elle admet une primitive A dérivable sur I et définie par $A(x) = \ln|1+\cos 3x| = \ln(1+\cos 3x)$. La forme générale des solutions de l'équation homogène est

   $$y_h(x) = C\exp A(x) = C\exp\big(\ln(1+\cos 3x)\big) = C(1+\cos 3x)\ , \quad C \in \mathbb{R}\ .$$

2. En utilisant la méthode de la variation de la constante, déterminer une solution particulière y_p de (E_1).

   Correction : On pose $y_p(x) = C(x)(1+\cos 3x)$ où C est maintenant une fonction à déterminer.

   On dérive : $y_p'(x) = C'(x)(1+\cos 3x) - 3\sin(3x)C(x)$. On obtient

   $$\underbrace{C'(x)(1+\cos 3x) - 3\sin(3x)C(x)}_{y_p'} + \frac{3\sin 3x}{1+\cos 3x} \times \underbrace{C(x)(1+\cos 3x)}_{y_p} = \sin x$$

   $$\Leftrightarrow C'(x) = \frac{\sin x}{1+\cos(3x)}$$

   dont une primitive est $C(x) = -\frac{1}{9}G(\cos x)$ d'après la question **Partie I - 2c)**. Finalement, une solution particulière est $y_p(x) = -\frac{1}{9}G(\cos x) \times (1+\cos 3x)$.

3. En déduire que la forme générale des solutions de (E_1) est

   $$y(x) = (1+\cos 3x)\left(-\frac{1}{9}G(\cos x) + C\right)\ , \quad C \in \mathbb{R}\ .$$

   Correction : On rappelle que la forme générale des solutions de l'équation (E_1) est $y = y_p + y_h$ ce qui donne

   $$y(x) = (1+\cos 3x)\left(-\frac{1}{9}G(\cos x) + C\right)\ , \quad C \in \mathbb{R}\ .$$

4. Déterminer l'unique solution y de (E_1) qui soit un infiniment petit au voisinage de $\frac{\pi}{2}$. Préciser sa partie principale.

Correction : L'unique solution doit vérifier la condition $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y(x) = 0$. Par continuité en $\frac{\pi}{2}$ des fonctions composants la solution y, on obtient

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y(x) = 0 \Leftrightarrow y(\tfrac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow (1+\cos 3\frac{\pi}{2})\left(-\frac{1}{9}G(\cos\frac{\pi}{2}) + C\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}+C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{3}.$$

On obtient

$$y(x) = (1+\cos 3x)\left(-\frac{1}{9}G(\cos x) + \frac{1}{3}\right) = (1+\cos 3x)\varphi(x)\ .$$

On a $y'(\frac{\pi}{2}) = -\dfrac{3\sin 3\frac{\pi}{2}}{1+\cos 3\frac{\pi}{2}}\underbrace{y(\tfrac{\pi}{2})}_{=0} + \sin\frac{\pi}{2} = 1 \neq 0$. La partie principale de $y(x)$ est $y'(\frac{\pi}{2})(x-\frac{\pi}{2}) = (x-\frac{\pi}{2})$.