Final MT91/MA91 - P2020
Conditions particulières
liées au COVID

La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants sur un total de 16 points.

Exercice 1 (Barème approximatif : 6.5)

1. À l'aide d'un changement de variable, déterminer la fonction G définie par
$$G(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{x} \frac{1}{4t^2 + 4t + 2}\, dt$$
(Indication : mettre le dénominateur sous forme canonique.)
2. À l'aide d'une intégration par partie, déterminer deux réels α et β tels que
$$\int G(x)\, dx = (x + \alpha)G(x) + \beta \ln(4x^2 + 4x + 2) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$
(Indiquez clairement vos choix pour les fonctions u et v' dans l'intégration par parties.)
3. Soit $I =]-1\,,1[$. On considère l'équation différentielle suivante
$$(E_1) \qquad (1 - x^2)y'(x) - 2xy(x) = 2G(x)\ , \quad x \in I\ .$$
   (a) Donner la forme générale des solutions y_h de l'équation homogène associée à (E_1). *(Penser à simplifier l'expression de y_h).*
   (b) En utilisant la méthode de la variation de la constante, déterminer une solution particulière y_p de (E_1).
   (c) En déduire l'unique solution de l'équation (E_1) vérifiant la condition $y(0) = 0$.

Exercice 2 (Barème approximatif : 9.5)

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par $P(z) = iz^2 + (1+2i)z + 1 + i$. Déterminer les racines de P.

2. (a) Préciser les racines du polynôme conjugué $\overline{P}$ de P.

   (b) On pose $Q(x) = P(x)\overline{P}(x)$. Donner la factorisation en produit de facteurs irréductibles de Q dans $\mathbb{C}[X]$.

3. En déduire la factorisation en produit de facteurs irréductibles de Q dans $\mathbb{R}[X]$.

4. On considère la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 10X + 6}{(X+1)^2(X^2+2X+2)}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

   (a) Déterminer le polynôme N tel que

   $$F = 1 + \frac{N}{Q} \quad \text{avec } \deg N < \deg Q.$$

   (b) Donner la forme de la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

   (c) Déterminer les coefficients des éléments simples.

5. En déduire que la forme générale des primitives de F est

$$\int F(x)\,dx = x - \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2+2x+2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$