Médian MT91/MA91 - P2019

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1 et 2 sont indépendants.

Exercice 1 (Barème approximatif : 10) **CHANGER DE COPIE**

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. On définit l'application φ sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{\alpha x - x\cos x}{1+2x+2x^2}$.
   (a) Justifier l'existence du développement de Taylor-Young de la fonction φ à l'ordre 4 , au voisinage de tout point $a \in \mathbb{R}$.
   (b) À l'aide d'une division selon les puissances croissantes, montrer que le développement de Taylor-Young, au voisinage de 0, à l'ordre 4, de la fonction φ est
   $$\varphi(x) = (\alpha-1)x - 2(\alpha-1)x^2 + (2\alpha - \tfrac{3}{2})x^3 - x^4 + x^4\varepsilon(x), \text{ avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
   (La division doit être posée sur la copie avec tous les détails des calculs des restes.)
   (c) Justifier que la fonction φ est un infiniment petit au voisinage de 0. Préciser sa partie principale en fonction des valeurs de α.

2. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $g(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.
   (a) Pour quelle valeur de α, la fonction g admet-elle un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0.
   (b) Pour cette valeur de α, déterminer le développement limité de $e^{g(x)}$ à l'ordre 2, au voisinage de 0.

3. Dans cette question, on suppose $\boldsymbol{\alpha \neq 1}$. On définit, pour $x \in]0, +\infty[$, les fonctions
   $$f_1(x) = x\varphi(\tfrac{1}{x}), \quad f_2(x) = x^2\varphi(\tfrac{1}{x}) \quad \text{et} \quad f_3(x) = x^3\varphi(\tfrac{1}{x}).$$
   On notera $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ leurs courbes représentatives, respectivement.
   (a) Laquelle de ces trois courbes admet une droite asymptote non horizontale $\mathscr{D}$ en $+\infty$? Justifier votre réponse.
   (b) Dans cette question, on suppose $\boldsymbol{\alpha = \frac{3}{4}}$.
      i. Donner l'équation de la droite $\mathscr{D}$.
      ii. Indiquer la position relative de cette courbe par rapport à son asymptote $\mathscr{D}$, au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2 (Barème approximatif : 10) **CHANGER DE COPIE**
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $h=\frac{1}{n}$ et $x_i = ih$, $i=0,\ldots,n$. On définit u_n et U_n des fonctions étagées sur $[0,1]$ par :
   $$u_n(x) = f(x_{i-1}) \text{ sur } [x_{i-1}, x_i[,\ i=1,\ldots,n.$$
   $$U_n(x) = f(x_i) \text{ sur }]x_{i-1}, x_i],\ i=1,\ldots,n.$$
   On pose $S_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{n^2+i^2}$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in]x_{i-1}, x_i[$, $i=1,\ldots,n$, on a $u_n(x) \leq f(x) \leq U_n(x)$.
   (b) Montrer que
   $$\int_0^1 u_n(x)\,dx = S_n - \frac{\sqrt{2}-1}{n} \quad \text{et} \quad \int_0^1 U_n(x)\,dx = S_n.$$
   (c) Utiliser la définition avec quantificateurs pour montrer que f est intégrable sur $[0,1]$.
   (d) En déduire que la série S_n converge. *(On ne demande pas de déterminer la limite.)*

2. (a) Soient u et v deux fonctions réelles dérivables, soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $x \in I$ tel que $u(x) \in I$ et $v(x) \in I$. Calculer la dérivée de $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$.
   (b) On pose $G(x) = 3 + \displaystyle\int_1^{\tan x} \ln(t)\,dt$.
      i. Déterminer l'intervalle J sur lequel la fonction G est définie et dérivable.
      ii. Préciser la valeur de $G(\frac{\pi}{4})$.
      iii. Calculer le développement limité de $\tan x$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 2.
      iv. En déduire le développement limité de $G(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de $\frac{\pi}{4}$.