Final MT02 - P2025
Durée : 2h

La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 - (Barème approximatif : 6 points - Temps de composition : 35 min)

On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$ et $\forall y \in \mathbb{R},\ f_2(y) = \dfrac{8y - 3y^2 + y^3}{2 - y + y^2}$.

1. Déterminer le développement limité de f_1 au voisinage de 0 à l'ordre 3.

   Correction : • Par changement de variable $t = -x$ dans le DL de e^t en $t = 0$, on obtient
   $$e^{-x} \underset{x\approx 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$
   • De plus, $\cos x - \sin x \underset{x\approx 0}{=} 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
   • On tronque à l'ordre 3 le DL du produit :
   $$\begin{aligned} f_1(x) &\underset{x\approx 0}{=} \left[1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right] \times \left[1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right] + o(x^3) \\ &= \left(1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + \left(-x + x^2 + \frac{x^3}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right) - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= 1 - 2x + x^2 + o(x^3) \end{aligned}$$

2. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x) - 1 + 2x}{\cos x - \frac{\sin x}{x}} = -3$.

   Correction : • Cette limite est indéterminée. D'après le résultat de la question 1, la partie principale du numérateur est $\boxed{x^2}$. • On cherche la partie principale du dénominateur :
   $$\cos x - \frac{\sin x}{x} \underset{x\approx 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) + o(x^2) = \boxed{-\frac{x^2}{3}} + o(x^2)$$
   On en déduit $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x) - 1 + 2x}{\cos x - \frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{-\frac{x^2}{3}} = -3$.

3. Effectuer la division selon les puissances croissantes de $A(h) = 6 + 5h + h^3$ par $B(h) = 2 + h + h^2$ avec un reste de valuation 4.

Correction :

$$
\begin{array}{lllllllll|l}
6 & + & 5h & & & + & h^3 & & & 2+h+h^2 \\
\hline
R_0 : & & 2h & - & 3h^2 & + & h^3 & & & \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{3}_{Q_0}+h}_{Q_1}-2h^2}_{Q_2}+h^3}_{Q_3} \\
 & R_1 : & & - & 4h^2 & & & & & \\
 & & & & R_2 & & 2h^3 & + & 2h^4 & \\
 & & & & & & R_3 & & h^4 \quad - \quad h^5 &
\end{array}
$$

4. En déduire que le développement limité de $f = f_2 \circ f_1$ au voisinage de 0 à l'ordre 3 est

$$f(x) = 3 - 2x - 7x^2 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

Indication : effectuer le changement de variable $y = 1 + h$ dans la fonction f_2)

Correction : • Comme $b = f_1(0) = 1$ on doit efftuer le DL de f_2 au voisinage de $b = 1$ avec changement de variable $y = 1 + h$.

$$f_2(1+h) = \frac{8(1+h) - 3(1+h)^2 + (1+h)^3}{2 - (1+h) + (1+h)^2} = \frac{6 + 5h + h^3}{2 + h + h^2} = 3 + h - 2h^2 + h^3 + o(h^3).$$

• Pour composer les DLs, on pose $\boxed{h = -2x + x^2}$:

$$\begin{aligned} f_2 \circ f_1(x) &= 3 + (-2x + x^2) - 2(-2x + x^2)^2 + (-2x + x^2)^3 + o(x^3) \\ &= 3 - 2x + x^2 - 8x^2 + 8x^3 - 8x^3 + o(x^3) \\ &= 3 - 2x - 7x^2 + o(x^3) \end{aligned}$$

5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Indiquer pour quelle valeur de α la fonction g définie par $g(x) = f(x) + \dfrac{1}{1 - \alpha x}$ admet-elle un extremum local en $a = 0$? Préciser sa valeur et sa nature.

Correction : On a

$$f(x) = 4 + (\alpha - 2)x + (\alpha^2 - 7)x^2 + o(x^3).$$

Une condition nécéssaire pour que $g(0) = 4$ soit un extremum local est $g'(0) = 0$ donc on doit avoir $\alpha - 2 = 0$, soit $\boxed{\alpha = 2}$. Par conséquent $g(x) - g(0) = -3x^2 + o(x^3) \leq 0$, il s'agit alors d'un maximum local.

Exercice 2 - (Barème approximatif : 7 points - Temps de composition : 45min)

1. (a) Déterminer la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \displaystyle\int_3^x \frac{1}{t^2-4t+5}dt$.

Correction : On met le dénominateur sous forme canonique : $t^2-4t+5 = (t-2)^2+1$. À l'aide du changement de variable $u = t-2$, on obtient

$$G(x) = \int_1^{x-2} \frac{1}{1+u^2} \times du = \Big[\text{Arctan}\, u\Big]_1^{x-2} = \text{Arctan}(x-2) - \text{Arctan}(1) = \text{Arctan}(x-2) - \frac{\pi}{4}.$$

(b) Déterminer deux nombres réels α et β tels que

$$\frac{t-2}{(t-1)^2(t^2-4t+5)} = \frac{\alpha}{(t-1)^2} + \frac{\beta}{t^2-4t+5}.$$

Correction : On trouve $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$. Pour ce faire on met le tout au même dénominateur :

$$t-2 = \alpha(t^2-4t+5) + \beta(t^2-2t+1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & \alpha+\beta \\ 1 & = & -4\alpha-2\beta \\ -2 & = & 5\alpha+\beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & -\beta \\ 1 & = & 2\beta \\ -2 & = & -4\beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad \beta = \frac{1}{2} \text{ et } \alpha = -\frac{1}{2}.$$

(c) À l'aide d'une integration par partie, compléter les pointillés :

$$\int \frac{\ln(x^2-4x+5)}{(x-1)^3}dx = -\frac{1}{2(x-1)^2}\ln(x^2-4x+5) + \quad \ldots$$

Correction : On pose $u'(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ et $v(x) = \ln(x^2-4x+5)$. On obtient $u(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2}$ et $v'(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+5}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(x^2-4x+5)}{(x-1)^3}dx &= -\frac{1}{2(x-1)^2}\ln(x^2-4x+5) - \int \left(-\frac{1}{2(x-1)^2} \times \frac{2x-4}{(x^2-4x+5)}\right)dx \\ &= -\frac{1}{2(x-1)^2}\ln(x^2-4x+5) + \int \frac{x-2}{(x-1)^2(x^2-4x+5)}dx \\ &= -\frac{1}{2(x-1)^2}\ln(x^2-4x+5) + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2}G(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad (x-1)y' - 2y = 2\ln(x^2-4x+5) + x - 1, \quad \text{avec } x \in I.$$

(a) Dans cette question, on suppose $I =]1, +\infty[$.

i. Déterminer la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E).

Correction : On isole y'

$$y' = \frac{2}{x-1}y + \frac{2\ln(x^2-4x+5)}{(x-1)} + 1.$$

On pose $a(x) = \frac{2}{(x-1)}$ et $b(x) = \frac{2\ln(x^2-4x+5)}{(x-1)} + 1$. Les fonctions a et b sont continues sur I. On calcule une primitive arbitraire de a :

$$A(x) = \int \frac{2}{x-1}dx = 2\ln(x-1) = \ln\left[(x-1)^2\right].$$

La forme générale des solutions de l'équation homogène est $y_h(x) = C(x-1)^2$ avec $C \in \mathbb{R}$ pouvant être choisie arbitrairement.

ii. À l'aide de la variation de la constante, montrer qu'une solution particulière de (E) est

$$y_p(x) = -\ln(x^2-4x+5) + (x-1)^2 G(x).$$

(Indication : utiliser la question **1c).***)*

Correction : On pose $y_p(x) = \varphi(x) \times (x-1)^2$. On dérive

$$y_p'(x) = \varphi'(x) \times (x-1)^2 + 2\varphi(x)(x-1).$$

On remplace dans (E) pour obtenir

$$\varphi'(x) \times (x-1)^3 \cancel{+2\varphi(x)(x-1)^2} \cancel{-2\varphi(x) \times (x-1)^2} = 2\ln(x^2-4x+5) + x - 1$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(x) = \frac{2\ln(x^2-4x+5)}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

D'après **1c)**, on obtient l'expression suivante pour $\varphi(x)$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= -\frac{1}{(x-1)^2}\ln(x^2-4x+5) + \frac{1}{(x-1)} + G(x) + \int \frac{1}{(x-1)^2} \\ &= -\frac{1}{(x-1)^2}\ln(x^2-4x+5) + G(x).\end{aligned}$$

Une solution particulière est donc $y_p(x) = -\ln(x^2-4x+5) + (x-1)^2 G(x)$.

iii. En déduire l'unique solution de (E) satisfaisant $y(3) = 0$.

Correction : La forme générale des solutions de (E) définies et dérivables sur I est $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = -\ln(x^2-4x+5) + (x-1)^2(C + G(x))$. La condition $y(3) = 0$ entraîne $-\ln(2) + 4C = 0$ car $G(3) = 0$. L'unique solution est

$$y(x) = -\ln(x^2-4x+5) + (x-1)^2\left(\frac{\ln(2)}{4} + G(x)\right).$$

(b) Le système

$$\begin{cases} (x-1)y' - 2y = 2\ln(x^2+4x+5) + x - 1\,, \\ y(3) = 0. \end{cases}$$

admet-il une et une seule solution définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$?

Correction : Non, il y a une infinité de solutions. Les fonctions définies par

$$y(x) = \begin{cases} -\ln(x^2-4x+5) + (x-1)^2(\frac{\ln(2)}{4} + G(x)) & \text{si } x \geq 1 \\ -\ln(x^2-4x+5) + (x-1)^2(C_2 + G(x)) & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

sont des solutions de (E) de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ quel que soit le choix de $C_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 - (Barème approximatif : 7 points - Temps de composition : 45 min)

On définit la suite de fonction $(f_n)_{n\geq 0}$ et sur $D = [0, \frac{\pi}{2}]$ par $f_n(x) = \cos^n(x)\sin(x)$.

On rapelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in D,\ f_n'(x) = \cos^{n-1}(x)\big(1-(n+1)\sin^2(x)\big)$.

   Correction :

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= n(-\sin(x))\cos^{n-1}(x) \times \sin(x) + \cos^n(x) \times \cos(x) \\ &= \cos^{n-1}(x)\big(-n\sin^2(x) + \cos^2(x)\big) \\ &= \cos^{n-1}(x)\big(-n\sin^2(x) + 1 - \sin^2(x)\big) = \cos^{n-1}(x)\big(1-(n+1)\sin^2(x)\big) \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \max\limits_{x\in D} |f_n(x)|$.

   Montrer que $u_n = f_n(\text{Arcsin}(\alpha_n))$ où $\alpha_n \in]0,1[$ est à préciser.

   Correction : On commence par résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Comme $\cos(x) \neq 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, on trouve

$$1-(n+1)\sin^2(x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2(x) = \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \sin(x) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Leftrightarrow x = \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

   En utilisant la croissance de la fonction sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit que

$$1-(n+1)\sin^2(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{\sqrt{n+1}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	u_n	$\searrow$	0

   On a bien $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = u_n = f_n\left(\text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right)$.

3. (a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \alpha_n$.

Correction : Comme $\forall\, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \in [0,1]$ et $\sin(x) \in [0,1]$, on en déduit que $0 \leq f_n(x) \leq \sin x$. D'où,

$$0 \leq u_n = f_n\left(\text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right) \leq \sin\left(\text{Arcsin}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

(b) En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur D vers la fonction identiquement nulle.

Correction : Puisque $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, il en résulte que $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ d'après le théorème des gendarmes. Ce qui signifie que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur D vers la fonction identiquement nulle.

4. Pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ fixé et $n \geq 0$, on pose $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^\theta f_n(x)dx$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_0^\theta f_k(x)dx$.

(a) Calculer I_{n+1} et montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = 1$.

Correction :

$$I_{n+1} = \left[-\frac{\cos^{n+1}(x)}{n+1}\right]_0^\theta = \frac{1-\cos^{n+1}(\theta)}{n+1}. \quad \text{Autrement dit, } I_n = \frac{1-\cos^n(\theta)}{n}$$

$$\theta \in]0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow 0 \leq \cos\theta < 1 \Rightarrow \cos^n(\theta) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Donc $nI_n = 1 - \cos^n(\theta) \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

(b) La série $\big(S_n\big)_{n\geq 0}$ est-elle divergente ou convergente ?

Correction : On en déduit que I_n est équivalent à $\frac{1}{n}$ donc $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} I_{k+1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} I_k$ est le terme général d'une série divergente d'après les règles de Riemann.

5. On pose $J_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n+1}} f_n(x)dx$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_0^{\frac{1}{k+1}} f_k(x)dx$.

(a) Déterminer la partie principale de l'infiniment petit $\ln(\cos x)$ au voisinage de 0.

Correction : Au voisinage de 0, on a

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{et } \ln(1+t) = t + o(t).$$

En posant $t = -\frac{x^2}{2}$, on en déduit que $\boxed{\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)}$.

(b) Sachant que $\cos^n(\frac{1}{n}) = e^{n\ln(\cos\frac{1}{n})}$, montrer que J_n est équivalent à $\frac{A}{n^\alpha}$ où A et α sont des réels positifs à préciser.

Correction : D'après **4a)**, $J_n = \frac{1-\cos^n(\frac{1}{n})}{n}$.

$$n \times \ln(\cos(\frac{1}{n})) = n \times \left(-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$e^t = 1 + t + o(t) \Rightarrow J_n = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})\right)}{n} = \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

(c) Justifier que la série $\left(S'_n\right)_{n\geq 0}$ converge.

Correction : Comme $\alpha = 2 > 1$, la série $(S'_n)_n \geq 0$ est convergente d'après les règles de Riemann.