Final MT02 - P2025
Durée : 2h

La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

Exercice 1 - (Barème approximatif : 6 points - Temps de composition : 35 min)

On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$ et $\forall y \in \mathbb{R},\ f_2(y) = \dfrac{8y - 3y^2 + y^3}{2 - y + y^2}$.

1. Déterminer le développement limité de f_1 au voisinage de 0 à l'ordre 3.
2. En déduire que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f_1(x) - 1 + 2x}{\cos x - \frac{\sin x}{x}} = -3$.
3. Effectuer la division selon les puissances croissantes de $A(h) = 6 + 5h + h^3$ par $B(h) = 2 + h + h^2$ avec un reste de valuation 4.
4. En déduire que le développement limité de $f = f_2 \circ f_1$ au voisinage de 0 à l'ordre 3 est
$$f(x) = 3 - 2x - 7x^2 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\to} 0.$$
(Indication : effectuer le changement de variable $y = 1 + h$ dans la fonction f_2.)
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Indiquer pour quelle valeur de α la fonction g définie par $g(x) = f(x) + \dfrac{1}{1 - \alpha x}$ admet-elle un extremum local en $a = 0$? Préciser sa valeur et sa nature.

Exercice 2 - (Barème approximatif : 7 points - Temps de composition : 40min)

1. (a) Déterminer la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \displaystyle\int_3^x \frac{1}{t^2 - 4t + 5} dt$.

   (b) Déterminer deux nombres réels α et β tels que
$$\frac{t-2}{(t-1)^2(t^2 - 4t + 5)} = \frac{\alpha}{(t-1)^2} + \frac{\beta}{t^2 - 4t + 5}.$$

   (c) À l'aide d'une intégration par partie, compléter les pointillés :
$$\int \frac{\ln(x^2 - 4x + 5)}{(x-1)^3} dx = -\frac{1}{2(x-1)^2} \ln(x^2 - 4x + 5) + \quad \dots$$

2. On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad (x-1)y' - 2y = 2\ln(x^2-4x+5) + x - 1, \quad \text{avec } x \in I.$$

   (a) Dans cette question, on suppose $I =]1, +\infty[$.

      i. Déterminer la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E).

      ii. À l'aide de la variation de la constante, montrer qu'une solution particulière de (E) est

$$y_p(x) = -\ln(x^2-4x+5) + (x-1)^2 G(x).$$

      (Indication : utiliser la question **1c).***)*

      iii. En déduire l'unique solution de (E) satisfaisant $y(3) = 0$.

   (b) Le système

$$\begin{cases} (x-1)y' - 2y = 2\ln(x^2+4x+5) + x - 1\,, \\ y(3) = 0. \end{cases}$$

   admet-il une et une seule solution définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$?

Exercice 3 - $\big($Barème approximatif : 7 points - Temps de composition : 50 min $\big)$

On définit la suite de fonction $(f_n)_{n\geq 0}$ et sur $D = [0, \frac{\pi}{2}]$ par $f_n(x) = \cos^n(x)\sin(x)$.

On rapelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D,\ f_n'(x) = \cos^{n-1}(x)\big(1-(n+1)\sin^2(x)\big)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \max\limits_{x\in D} |f_n(x)|$.

   Montrer que $u_n = f_n(\mathrm{Arcsin}(\alpha_n))$ où $\alpha_n \in]0,1[$ est à préciser.
3. (a) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq \alpha_n$.

   (b) En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur D vers la fonction identiquement nulle.
4. Pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ fixé et $n \geq 0$, on pose $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^\theta f_n(x)dx$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_0^\theta f_k(x)dx$.

   (a) Calculer I_{n+1} et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = 1$.

   (b) La série $\big(S_n\big)_{n\geq 0}$ est-elle divergente ou convergente ?
5. On pose $J_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n+1}} f_n(x)dx$ et $S_n' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_0^{\frac{1}{k+1}} f_k(x)dx$.

   (a) Déterminer la partie principale de l'infiniment petit $\ln(\cos x)$ au voisinage de 0.

   (b) Sachant que $\cos^n(\frac{1}{n}) = e^{n\ln(\cos\frac{1}{n})}$, montrer que J_n est équivalent à $\frac{A}{n^\alpha}$ où A et α sont des réels positifs à préciser.

   (c) Justifier que la série $\big(S_n'\big)_{n\geq 0}$ converge.