MT02 - Médian (1h30 min) - P2025

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 (Barème approximatif : (4,9,3+4) points - 1h30min)

Soient f l'application définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{4}$. On pose $g(x) = f(x) - x$.

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour la fontion g.

   Correction : Soit g une application définie et continue sur un intervalle I. Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. Pour tout réel k strictement compris entre $g(a)$ et $g(b)$, il existe $c \in]a, b[$, tel que $g(c) = k$

2. Montrer que $g(x) = 0$ admet trois solutions $c_1 \in]-2, -1[,\ c_2 \in]0, 1[$ et $c_3 \in]3, 4[$.

   Correction : • Par hypothèse f est continue sur $\mathbb{R}$. L'expression $x \mapsto -x$ est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}$. Par somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, l'application g l'est aussi.
   • On a $g(-2) = -2 < 0 < g(-1) = 1$ donc $\exists c_1 \in]-2, -1[,\ g(c_1) = 0 \Leftrightarrow f(c_1) = c_1$.
   • On a $g(1) = -\frac{1}{2} < 0 < g(0) = 1$ donc $\exists c_2 \in]0, 1[,\ g(c_2) = 0 \Leftrightarrow f(c_2) = c_2$.
   • On a $g(3) = -2 < 0 < g(4) = 1$ donc $\exists c_3 \in]3, 4[,\ g(c_3) = 0 \Leftrightarrow f(c_3) = c_3$.

3. En déduire que $g(x) = \dfrac{(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)}{4}$. Puis dresser le tableau de signe de $g(x)$.

   Correction : L'application g est un polynôme de degré 3 donc admet exactement 3 racines qui sont c_1, c_2 et c_3. Puisque le coefficient du monôme de plus haut degré est $\frac{1}{4}$ on a $g(x) = \frac{1}{4}(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)$.

x	$-\infty$		c_1		c_2		c_3		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie I - Suite récurrente/ Étude d'un ensemble

Dans cette partie, on considère la suite récurrente définie par $u_0 \in\ [0, c_2]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
On admet que f est décroissante sur $[0, 2]$ et que $f \circ f(x) - x$ est du même signe que $f(x) - x$.

1. Montrer par récurrence sur n que $\forall\, n \geq 0,\ u_{2n} \in\ [0, c_2]$ et $u_{2n+1} \in [c_2, 2]$.

   Correction : On pose $H(n) :=$« $u_{2n} \in\ [0, c_2]$ et $u_{2n+1} \in [c_2, 2]$ ».
   • Initialisation à $n = 0$: par hypothèse $u_0 \in [0, c_2]$. Comme f est décroissante on a $u_1 = f(u_0) \in [f(c_2), f(0)] = [c_2, 1] \subset [c_2, 2]$. Donc $H(0$ est vraie.
   • Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $H(n)$ est vrai. Montrons $H(n+1)$.
   On utilise encore la décroissance de f :

$$u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) \in [f(2), f(c_2)] = [0, c_2] \text{ et } u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) \in [f(c_2), f(0)] = [c_2, 1] \subset [c_2, 2].$$

Conclusion : « $H(n) \Rightarrow H(n+1)$ »et $H(0)$ est vraie donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \in [0,c_2]$ et $u_{2n+1} \in [c_2,2]$.

2. Sachant que $u_{2n+2}=f\circ f(u_{2n})$ et $u_{2n+3}=f\circ f(u_{2n+1})$, préciser la monotonie de (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
   Correction : • $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} \in [0,c_2]$ et $\forall x \in [0,c_2],\ f\circ f(x) - x \geq 0$. On en déduit que $u_{2n+2} - u_{2n} = f\circ f(u_{2n}) - u_{2n} \geq 0$ donc $(u_{2n}$ est croissante.
   • $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} \in [c_2,2]$ et $\forall x \in [c_2,2],\ f\circ f(x) - x \leq 0$. On en déduit que $u_{2n+3} - u_{2n+1} = f\circ f(u_{2n+1}) - u_{2n+1} \leq 0$ donc $(u_{2n+1}$ est décroissante.
3. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.
   Correction : • (u_{2n}) est croissante et majorée par c_2 donc (u_{2n}) converge vers une limite ℓ. La limite doit être un point fixe de f appartenant à $[0,c_2]$ donc il s'agit de $\ell = c_2$.
   • (u_{2n+1}) est décroissante et minorée par c_2 donc (u_{2n+1}) converge vers une limite ℓ'. La limite doit être un point fixe de f appartenant à $[c_2,2]$ donc il s'agit de $\ell' = c_2$.
   • On en déduit que $u_{2n+1} - u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \ell - \ell' = c_2 - c_2 = 0$. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.
4. En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.
   Correction : On a montré que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite c_2 alors (u_n) converge aussi vers c_2.
5. Soit $A := \{(-1)^n u_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ avec $u_0 = 0$. On notera $v_n = (-1)^n u_n$ les éléments de A.
   (a) Ordonner totalement les éléments de A. *(Indication : étudier (v_{2n}) et (v_{2n+1}).)*
   Correction : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{2n} = u_{2n}$ et $v_{2n+1} = -u_{2n+1}$. D'après ce qui précède,
   $$(v_{2n}) \text{ est croissante} \Rightarrow v_0 = 0 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_{2n} \leq c_2.$$
   $$(u_{2n+1}) \text{ est décroissante} \Rightarrow (v_{2n+1}) \text{ est croissante} \Rightarrow v_1 = -1 \leq v_3 \leq \cdots \leq v_{2n+1} \leq -c_2 < 0.$$
   On en déduit l'ordre total suivant des éléments de A :
   $$v_1 = -1 \leq v_3 \leq \cdots \leq v_{2n+1} \leq -c_2 < v_0 = 0 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_{2n} \leq c_2.$$
   (b) Montrer que A admet un plus petit élément, noté $\min A$, dont on précisera la valeur.
   Correction : On a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq v_1 = -1$. Le plus petit élément de A est $v_1 = -1$.
   (c) Montrer que A admet une borne supérieure.
   Correction : L'ensemble A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide car $v_0 = 0 \in A$. A est majoré par c_2. D'après l'axiome de la borne sup, $\sup A$ existe.
   (d) Rappeler la caractérisation de la borne supérieure de A, à l'aide des quantificateurs.
   Correction : La borne sup de A vérifie : • $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq \sup A$,
   • $\forall t < \sup A,\ \exists n \in \mathbb{N},\ v_n > t$.
   (e) Utiliser cette caractérisation pour démontrer que $\sup A = c_2$.
   Correction : D'après la question 5a) On sait déjà que c_2 est un majorant de A.
   Le second point s'en déduit de la convergence de $(v_{2n} = u_{2n})$ vers c_2. Soit $t < c_2$. On pose $\varepsilon = c_2 - t > 0$. Par définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n} = c_2$, on a
   $$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow |v_{2n} - c_2| < \varepsilon \Rightarrow \boxed{c_2 - \varepsilon = t < v_{2n}} < c_2 + \varepsilon)$$
   Il suffit de choisir $n = N+1$ et on a $v_{2n} > t$.

Partie II - Suite et série numériques

Dans cette partie, on considère la suite récurrente définie par $u_0 \in]c_3, +\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On admet que f est croissante sur $[2, +\infty[$.

1. Préciser la monotonie de (u_n).

   Correction : D'après le tableau de signe, $\forall x \in]c_3, +\infty[,\ g(x) = f(x) - x > 0$. Autrement dit, $f(x) > x > c_3$. On en déduit donc par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]c_3, +\infty[$. De plus, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$ donc la suite suite (u_n) est croissante.

2. Démontrer par l'absurde que (u_n) diverge.

   Correction : (cf TD4) On montre par l'absurde que la suite diverge.
   démonstration : Supposons que (u_n) converge. On sait alors que la suite converge vers $\ell \in \{c_1, c_2, c_3\}$ car la limite doit être un point fixe. D'après le cours, on sait que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell \leq c_3}$. Or, par hypothèse on a $u_0 > c_3$ (supérieur stricte). Ceci est contradictoire avec la phrase encadrée pour $n = 0$.

   La phrase "$c_3 < u_0 \leq c_3$" est absurde.

   La négation de "(u_n) converge " mène à une absurdité donc la proposition "(u_n) diverge" est vraie.

3. Montrer par l'absurde que (u_n) tend vers $+\infty$.

   Correction : (cf TD4) On montre par l'absurde que la suite tend vers $+\infty$.
   démonstration : On suppose que la suite (u_n) ne tend pas vers $+\infty$. On prend la négation de

   $$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n > N \Rightarrow u_n > A).$$

   Cela donne

   $$\exists A \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n > N \text{ et } u_n \leq A.$$

   Comme la suite est croissante, on a $n > N \Rightarrow u_N \leq u_n$ donc la phrase devient

   $$\boxed{\exists A \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, u_N \leq A.}$$

   On peut alors en déduire que (u_n) est majorée.
   Or, si (u_n) est majorée et croissante, le cours affirme que (u_n) converge. Ce qui est absurde car (u_n) diverge.
   La négation de "(u_n) tend vers $+\infty$ " mène à une absurdité donc la proposition "(u_n) tend vers $+\infty$" est vraie.

4. Pour $n \geq 0$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{f(k+3)}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$ où $u_0 = 4$.

   (a) À l'aide des règles de Riemann, justifier que (T_n) converge. *(Indication : déterminer un équivalent de $\frac{1}{f(n+3)}$ sous la forme $\frac{A}{n^\alpha}$.)*

   Correction : $f(n+3) \approx \frac{n^3}{4}$ donc $\frac{1}{f(n+3)} \approx \frac{4}{n^3}$. D'après les règles de Riemann, la série (T_n) converge car $\alpha = 3 > 1$.

   (b) Sachant que $f(x) = \dfrac{(x-2)^2(x+1)}{4}$, montrer que $\forall x \in [4, +\infty[,\ f(x) \geq x + 1$.

Correction : Soit $x \in [4, +\infty[$. Alors,

$$x - 2 \geq 2 \Rightarrow (x-2)^2 \geq 2^2 = 4 \Rightarrow f(x) \geq \frac{(x+1) \times 4}{4} = x + 1.$$

(c) Montrer par récurence que $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \geq f(n+3)$.

Correction : On pose $H(n) = u_n \geq f(n+3)$.

• Initialisation à $n = 0$: d'après l'énoncé $u_0 = 4$ et $f(0+3) = 1$ donc $H(0$ est vraie.

• Hérédité : Supposons $H(n)$ vraie. Montrons $H(n+1)$.

Par hypothèse, $u_n \geq f(n+3) \geq n+4$ (d'après (b)). On applique la fonction f qui est croissante et on obtient $u_{n+1} = f(u_n) \geq f(n+4) = f((n+1)+3)$.

Conclusion : « $H(n) \Rightarrow H(n+1)$ »et $H(0)$ est vraie donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \geq f(n+3)$.

(d) En déduire que (S_n) converge.

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \geq f(n+3) > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{f(n+3)} \Rightarrow 0 \leq S_n \leq T_n.$$

Toute suite de nombres postifs est croissante donc (T_n) et (S_n) sont croissantes.

La série (T_n) converge donc est majorée par sa limite T. On en déduit que (S_n) est croissante et majorée par T également donc (S_n) converge.

Exercice 3 (Barème approximatif : 4 points - 25min)

Soit f l'application définie sur $]-1, 1[\backslash\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1+x}-1}$.

1. Justifier que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$.

   Correction : On pose $g(x) = \sqrt{1+x}$. L'application g est dérivable sur $]-1, +\infty[$ avec $g(0) = \sqrt{1+0} = 1$ et $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$. On a donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = \frac{1}{2}.$$

2. Déterminer $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(1-t)}{t}$.

   Correction : On pose $g(t) = \ln(1-t)$. L'application g est dérivable sur $]-\infty, 1[$ avec $g(0) = \ln(1-0) = 0$ et $g'(t) = \frac{-1}{1-t}$. On a donc

$$\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1-t)}{t} = \lim_{x \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = g'(0) = \frac{-1}{1-0} = -1.$$

3. Montrer que f est prolongeable par continuité en $a = 0$ en une fonction $\widetilde{f}$ à préciser.

Correction : • Par quotient et composition de fonctions usuelles (logarithme népérien, racine carrée et polynômes), l'application f est définie et continue sur son domaine de définition. Celui-ci est caractérisé par ($1+x>0$ et $1-x^2>0$ et $\sqrt{1+x}\neq 1$)$\Leftrightarrow x\in]-1,1[$ et $x\neq 0$.
• On modifie l'écriture de $f(x)$ pour lever l'indétermination $\frac{0}{0}$:

$$f(x)=\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\times\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}\times x \underset{x\to 0}{\to} -1\times\frac{1}{\frac{1}{2}}\times 0=0.$$

• On en déduit que f est prolongeable en $a=0$ en une fonction continue $\tilde{f}$ sur $]-1,1[$ définie par

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1+x}-1} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

4. Montrer que $\widetilde{f}'(0)=-2$.
Correction : On étudie la limite du taux d'accroissement de $\tilde{f}$ en 0 :

$$\tilde{f}'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\tilde{f}(0)-\tilde{f}(x)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{x(\sqrt{1+x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\times\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}=-1\times\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2.$$