MT02 - Médian (1h30 min) - P2025

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 (Barème approximatif : (4,9,3+4) points - 1h30min)

Soient f l'application définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{4}$. On pose $g(x) = f(x) - x$.

1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour la fontion g.
2. Montrer que $g(x) = 0$ admet trois solutions $c_1 \in]-2, -1[$, $c_2 \in]0, 1[$ et $c_3 \in]3, 4[$.
3. En déduire que $g(x) = \dfrac{(x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)}{4}$. Puis dresser le tableau de signe de $g(x)$.

x	$-\infty$		c_1		c_2		c_3		$+\infty$
$g(x)$			0		0		0		

Partie I - Suite récurrente/ Étude d'un ensemble

Dans cette partie, on considère la suite récurrente définie par $u_0 \in [0, c_2]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
On admet que f est décroissante sur $[0, 2]$ et que $f \circ f(x) - x$ est du même signe que $f(x) - x$.

1. Montrer par récurrence sur n que $\forall\, n \geq 0,\ u_{2n} \in [0, c_2]$ et $u_{2n+1} \in [c_2, 2]$.
2. Sachant que $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$ et $u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$, préciser la monotonie de (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
3. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.
4. En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.
5. Soit $A := \{(-1)^n u_n \ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ avec $u_0 = 0$. On notera $v_n = (-1)^n u_n$ les éléments de A.
   (a) Ordonner totalement les éléments de A. *(Indication : étudier (v_{2n}) et (v_{2n+1}).)*
   (b) Montrer que A admet un plus petit élément, noté $\min A$, dont on précisera la valeur.
   (c) Montrer que A admet une borne supérieure.
   (d) Rappeler la caractérisation de la borne supérieure de A, à l'aide des quantificateurs.
   (e) Utiliser cette caractérisation pour démontrer que $\sup A = c_2$.

Partie II - Suite et série numériques

Dans cette partie, on considère la suite récurrente définie par $u_0 \in]c_3, +\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
On admet que f est croissante sur $[2, +\infty[$.

1. Préciser la monotonie de (u_n).
2. Démontrer par l'absurde que (u_n) diverge.
3. Montrer par l'absurde que (u_n) tend vers $+\infty$.

Rappel : pour un total de 20 points, choisir de traiter ci-dessous :
- soit l'exercice 1 - parties II Question 4 ;
- soit l'exercice 3.

4. Pour $n \geq 0$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{f(k+3)}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$ où $u_0 = 4$.

   (a) À l'aide des règles de Riemann, justifier que (T_n) converge. *(Indication : déterminer un équivalent de* $\frac{1}{f(n+3)}$ *sous la forme* $\frac{A}{n^\alpha}$*.)*

   (b) Sachant que $f(x) = \dfrac{(x-2)^2(x+1)}{4}$, montrer que $\forall x \in [4, +\infty[,\ f(x) \geq x+1$.

   (c) Montrer par récurence que $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \geq f(n+3)$.

   (d) En déduire que (S_n) converge.

Exercice 3 (Barème approximatif : 4 points - 25min)

Soit f l'application définie sur $]-1, 1[\backslash\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1+x}-1}$.

1. Justifier que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2}$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1-t)}{t}$.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en $a = 0$ en une fonction $\widetilde{f}$ à préciser.
4. Montrer que $\widetilde{f}'(0) = -2$.