MT02 - Test 2 (45 min) - P2025

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 (Barème approximatif : (12 points)

1. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{e^x + 2}$.
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 < f(x) < 1$.
   Correction : Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0 \Rightarrow e^x + 2 > 2 \Rightarrow 0\frac{1}{e^x+2} < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < f(x) < 1$.

   (b) Montrer que $f'(x) = \big(f(x)\big)^2 - f(x)$.
   Correction : On calcule les deux termes l'un après l'autre :
$$f'(x) = -\frac{2e^x}{(2+e^x)^2},$$
$$\big(f(x)\big)^2 - f(x) = \frac{4}{(2+e^x)^2} - \frac{2}{e^x+2} = \frac{4-2(e^x+2)}{(e^x+2)^2} = -\frac{2e^x}{(e^x+2)^2} = f'(x).$$

   (c) Sachant que $t^2 - t = \big(t - \frac{1}{2}\big)^2 - \frac{1}{4}$, en déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ -\frac{1}{4} \leq f'(x) < 0$.
   Correction : On pose $t = f(x)$ pour écrire
$$f'(x) = \big(f(x) - \tfrac{1}{2}\big)^2 - \tfrac{1}{4}.$$
$$-\tfrac{1}{2} < f(x) - \tfrac{1}{2} < \tfrac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \big(f(x) - \tfrac{1}{2}\big)^2 < \tfrac{1}{4} \Rightarrow -\tfrac{1}{4} \leq f'(x) < 0.$$

   (d) Justifier que f admet une application réciproque f^{-1} définie et dérivable sur son domaine de définition $D_{f^{-1}}$ à préciser. (On ne demande pas de calculer l'expression de $f^{-1}(x)$)
   Correction : La fonction dérivée de f est de signe constant et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement monotone et donc bijective si on la considère définie de $\mathbb{R}$ sur $\operatorname{Im} f$. De plus,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{2}{0+2} = 1.$$
   L'image d'un intervalle ouvert par une application strictement monotone est un intervalle ouvert d'où $\operatorname{Im} f =]0,1[$. Son application réciproque f^{-1} est définie sur $D_{f^{-1}} =]0,1[$.

   (e) <u>Sans calculer l'expression algébrique de $f^{-1}(x)$</u>, montrer que $\forall x \in D_{f^{-1}},\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$.
   Correction : Sachant que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée ne s'annule jamais, on sait que $(f^{-1})'$ est définie sur $]0,1[$ par
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\big(f(f^{-1}(x))\big)^2 - f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}.$$

2. On pose $g(x) = f(3x-2)$.

   (a) Calculer $K = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |g'(x)|$.

   Correction : On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition avec un polynôme, l'application g est dérivable sur $\mathbb{R}$ également avec $g'(x) = 3f'(3x-2)$. On a donc $K = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |g'(x)| = 3 \times \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = \frac{3}{4}$ atteint en $x = \ln 2$.

   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Énoncer le théorème des accroissements finis pour la fonction g sur $[a,b]$.

   Correction : Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ alors
   $\exists\, c \in]a,b[,\ f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

   (c) En déduire que $\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2,\ |g(x) - g(x')| \leq K|x - x'|$.

   Correction : On applique l'égalité des accroissements finis à f entre $x \in [0,+\infty[$ et $x' \in [0,+\infty[$.

   • Si $x = x'$, on a $|g(x) - g(x')| = 0 = K|x-x'|$. L'égalité entraîne l'inégalité.

   • Pour $x \neq x'$, sans perte de généralité, on peut supposer que $x < x'$. L'application f est continue sur $[x,x']$ et dérivable sur $]x,x'[$ donc il existe $c \in]x,x'[,\ g(x) - g(x') = g'(c)(x-x')$. En valeur absolue, cela entraîne
   $$|g(x) - g(x')| = |g'(c)||x-x'| \leq K|x-x'|.$$

   (d) Montrer que $\ell = \frac{2}{3}$ est l'unique point fixe de g sur $\mathbb{R}$.

   Correction : Comme $g(\frac{2}{3}) = f(0) = \frac{2}{3}$, $\ell = \frac{2}{3}$ est bien un point fixe de g.
   On montre l'unicité par l'absurde : Soit ℓ' un autre point fixe de g, càd $\ell' \neq \ell$ et $\ell' = g(\ell')$. Alors
   $$|g(\ell') - g(\ell)| = |\ell' - \ell| \leq \tfrac{3}{4}|\ell' - \ell| \underset{\text{car } \ell' \neq \ell}{\Rightarrow} 1 \leq \tfrac{3}{4}$$
   ce qui est absurde.

   (e) Montrer que la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = g(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$ fixé, converge vers ℓ.

   Correction : Démonstration vue en cours sachant que $0 < K < 1$.

   (i) étape 1 : on pose $x = u_n$ et $y = \ell$ dans **2.c)** et on obtient
   $|g(u_n) - g(\ell)| = |u_{n+1} - \ell| \leq K|u_n - \ell|$.

   (ii) étape 2 : on montre par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leq K^n|u_0 - \ell|}$
   Initialisation à $n = 0$: on a $|u_0 - \ell| = K^0|u_0 - \ell|$, l'égalité entraîne l'inégalité.
   Hérédité : Soit $n \geq 0$, tel que $|u_n - \ell| \leq K^n|u_0 - \ell|$. D'après l'étape 1 on a
   $|u_{n+1} - \ell| \leq K|u_n - \ell| \underset{\text{par Hyp. Réc.}}{\Rightarrow} |u_{n+1} - \ell| < K \times K^n|u_0 - \ell| = K^{n+1}|u_0 - \ell|$.
   La proposition est vraie au rang $n+1$.

   (iii) étape 3 : La suite de terme général $K^n|u_0 - \ell|$ est une suite géométrique de raison $0 < K < 1$ donc elle converge vers 0. D'après le corollaire 1 du théorème des gendarmes, la suite $u_n - \ell \underset{n\to\infty}{\to} 0$. De façon équivalente, $u_n \underset{n\to\infty}{\to} \ell$.

Exercice 2 (Barème approximatif : (8 points)

1. Soit P un polynôme de degré 3.

   (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Écrire la formule de Taylor pour P à l'aide des dérivées successives $P^{(k)}(a)$, avec $k \in \mathbb{N}$.

   Correction : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
   $$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{P^{(3)}(a)}{6}(x-a)^3.$$

   (b) Dans cet exercice, on suppose que $P(1) = 1$, $P'(1) = 4$ et $P''(1) = 10$ et $P^{(3)}(1) = 12$. Montrer que l'expression $P(x)$ est de la forme
   $$P(x) = c_2 x^2 + c_3 x^3,$$
   où c_2 et c_3 sont des entiers relatifs à préciser.

   Correction : Il suffit de développer la formule de Taylor précédente avec $a = 1$
   $$\begin{aligned} P(x) &= 1 + 4(x-1) + \frac{10}{2}(x-1)^2 + \frac{12}{6}(x-1)^3 \\ &= 1 + (4x-4) + (5x^2 - 10x + 5) + (2x^3 - 6x^2 + 6x - 2) \\ &= -x^2 + 2x^3. \end{aligned}$$

2. Donner la formule de Taylor-Young de la fonction $x \mapsto \sin x$ en $a = 0$ à l'ordre 3.

   Correction : Il existe une fonction ε telle que
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{et } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

3. Donner la formule de Taylor-Young de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en $a = 0$ à l'ordre 3.

   Correction : Il existe une fonction ε telle que
   $$\forall x > -1,\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{et } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Pour $x \in I = \left]-1, +\infty\right[$, on pose $f(x) = P(x) + 2\sin x + \alpha \ln(1+x)$.

   (a) Déterminer (en fonction de α) la constante réelle β_3 de sorte que
   $$\forall x \in I,\ f(x) = (2+\alpha)x - (2+\alpha)\frac{x^2}{2} + \beta_3 x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\to} 0.$$

   Correction :
   $$\begin{aligned} f(x) &= \left[-x^2 + 2x^3\right] + 2\left[x - \frac{x^3}{6}\right] + \alpha\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right] + x^3\varepsilon(x) \\ &= (2+\alpha)x - \frac{2+\alpha}{2}x^2 + x^3\left(\frac{5+\alpha}{3}\right) + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

   (b) Justifier que la fonction f est un infiniment petit au voisinage de $a = 0$. En fonction des valeurs de α, préciser sa partie principale.

   Correction : • La fonction f est continue donc
   $$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = P(0) + 2\sin(0) + \alpha \ln 1 = 0.$$
   Quelque soit la valeur de α, $f(x)$ est un infiniment petit au voisinage de 0.
   • Si $\alpha \neq -2$, alors la partie principale est $(2+\alpha)x$;
   Si $\alpha = -2$ alors la partie principale est x^3.