MT02 - Test 2 (45 min) - P2025

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 (Barème approximatif : (12 points)
Vous pouvez admettre les résultats de la question 1 pour traiter la question 2.

1. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{e^x + 2}$.
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 < f(x) < 1$.
   (b) Montrer que $f'(x) = \big(f(x)\big)^2 - f(x)$.
   (c) Sachant que $t^2 - t = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, en déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ -\frac{1}{4} \leq f'(x) < 0$.
   (d) Justifier que f admet une application réciproque f^{-1} définie et dérivable sur son domaine de définition $D_{f^{-1}}$ à préciser. (On ne demande pas de calculer l'expression de $f^{-1}(x)$)
   (e) <u>Sans calculer l'expression algébrique de $f^{-1}(x)$</u>, montrer que $\forall x \in D_{f^{-1}},\ (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$.
2. On pose $g(x) = f(3x - 2)$.
   (a) Calculer $K = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |g'(x)|$.
   (b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Énoncer le théorème des accroissements finis pour la fonction g sur $[a, b]$.
   (c) En déduire que $\forall (x, x') \in I^2,\ |g(x) - g(x')| \leq K|x - x'|$.
   (d) Montrer que $\ell = \frac{2}{3}$ est l'unique point fixe de g sur $\mathbb{R}$.
   (e) Montrer que la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = g(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$ fixé, converge vers ℓ.

Exercice 2 (Barème approximatif : (8 points)

1. Soit P un polynôme de degré 3.
   (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. Écrire la formule de Taylor pour P à l'aide des dérivées successives $P^{(k)}(a)$, avec $k \in \mathbb{N}$.
   (b) Dans cet exercice, on suppose que $P(1) = 1$, $P'(1) = 4$ et $P''(1) = 10$ et $P^{(3)}(1) = 12$. Montrer que l'expression $P(x)$ est de la forme
   $$P(x) = c_2 x^2 + c_3 x^3,$$
   où c_2 et c_3 sont des entiers relatifs à préciser.
2. Donner la formule de Taylor-Young de la fonction $x \mapsto \sin x$ en $a = 0$ à l'ordre 3.
3. Donner la formule de Taylor-Young de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ en $a = 0$ à l'ordre 3.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ un paramètre. Pour $x \in I = \left]-1, +\infty\right[$, on pose $f(x) = P(x) + 2\sin x + \alpha \ln(1+x)$.
   (a) Déterminer (en fonction de α) la constante réelle β_3 de sorte que
   $$\forall\, x \in I,\ f(x) = (2+\alpha)x - (2+\alpha)\frac{x^2}{2} + \beta_3 x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
   (b) Justifier que la fonction f est un infiniment petit au voisinage de $a = 0$.
   En fonction des valeurs de α, préciser sa partie principale.