MT02 - Corrigé du Médian - P2026

Exercice 1 (Barème approximatif : (9,6,5) points)

Soient f la fonction définie, dérivable et paire sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \sin^2(\frac{\pi}{2x})$.
On admet que $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{2f(x)}{x} - \frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{x})$.

Partie I - Prolongement par continuité de f

1. Justifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
   Correction : • La quantité $x \mapsto \sin^2(\frac{\pi}{2x})$ est bornée. De plus, $x^2 \underset{x\to 0}{\to} 0$. D'après le corollaire 2 du théorème des gandarmes, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
   • $\dfrac{f(x)}{x} = x\sin^2(\frac{\pi}{2x})$. De même,la quantité $x \mapsto \sin^2(\frac{\pi}{2x})$ est bornée. De plus, $x \underset{x\to 0}{\to} 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.
2. Montrer, à l'aide des suites, que $x \mapsto \sin(\frac{\pi}{x})$ n'admet pas de limite en 0.
   Correction : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \frac{1}{2n+\frac{1}{2}}$ et $x'_n = \frac{1}{n}$. On a $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $x'_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. De plus $\sin(\frac{\pi}{x_n}) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$ et $\sin(\frac{\pi}{x'_n}) = \sin(n\pi) = 0$. La suite $(f(x_n))$ est constante donc convergente vers 1, la suite $(f(x'_n))$ est constante donc convergente vers 0. Comme il n'y a pas unicité de la limite des images au voisinage de 0, la fonction $x \mapsto \sin(\frac{\pi}{x})$ n'ademet pas de limites en 0.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{4}$.
   Correction : On écrit $f(x) = \left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2x})}{\frac{\pi}{2x}}\right)^2 \times \frac{\pi^2}{4}$. On sait que $\frac{\sin t}{t} \underset{t\to 0}{\to} 1$. Par compositionde limite avec $t = \frac{\pi}{2x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, on en déduit que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 1^2 \times \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}$.
4. Compléter la table de valeur ci-contre :
   Correction :

x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
$f(x)$	0	1	$\frac{27}{16}$	2	$\frac{9}{4}$

5. (a) Justifier que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\widetilde{f}$ définie et continue sur $\mathbb{R}$ à préciser.
   Correction : Par produit, quotient et composition de fonctions usuelles (polynômes et sinus), l'application f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. D'après **Q1.**, la fonction f admet une limite en 0 donc f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\widetilde{f}$ définie et continue sur $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x^2\sin^2(\frac{\pi}{2x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(b) La fonction $\tilde{f}$ est-elle dérivable en 0 ?

Correction : On étudie le taux la limite du taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} \underset{x\to 0}{\to} 0, \quad \text{d'après } \mathbf{Q1}.$$

Oui, la fonction $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et $\tilde{f}'(0) = 0$.

(c) Si oui, la fonction dérivée $\tilde{f}'$ est-elle continue en 0 ?

Correction : il faut vérifier si $\lim\limits_{x\to 0} \tilde{f}'(x) = \tilde{f}'(0) = 0$. D'après l'énoncé, $f'(x) = \frac{2f(x)}{x} - \frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{x})$. Quand $x \to 0$, le premier terme tend vers 0 d'après **Q1.** mais le second terme n'admet pas de limite. Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0} \tilde{f}'(x)$ n'existe pas et $\tilde{f}'$ n'est pas continue en 0.

(d) i. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction $\tilde{f}$ sur $[a,b]$, avec $a<b$.

Correction : voir le cours du chapitre 4.

ii. Montrer que $\forall y \in]0,1[\,,\ \exists x \in]0,1[\,,\ y = \tilde{f}(x)$.

Correction : On a $\tilde{f}(0) = 0$ et $\tilde{f}(1) = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout y strictement compris entre $\tilde{f}(0) = 0$ et $\tilde{f}(1) = 1$, il existe $c \in]0,1[$, tel que $y = f(c)$. On pose $x = c$ et on a aussi $y \in \tilde{f}(]0,1[)$.

iii. En déduire que $\tilde{f}([0,1[) = [0,1[$. *(Indication : procéder par double inclusion.)*

Correction :• D'après (ii), on a $]0,1[\subset f(]0,1[) \subset \tilde{f}([0,1[)$. De plus $0 = \tilde{f}(0)$ donc $[0,1[\subset \tilde{f}([0,1[)$.

• $x \in [0,1[\Rightarrow 0 \leq x^2 < 1$ et $0 \leq \sin^2(\frac{\pi}{2x}) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \tilde{f}(x) < 1$. Donc $\tilde{f}([0,1[) \subset [0,1[$.

• D'où l'égalité $\tilde{f}([0,1[) = [0,1[$.

(e) Sachant que $\tilde{f}$ est strictement croissante sur $]1,+\infty[$, déterminer $\tilde{f}(]1,+\infty[)$.

Correction : L'application $\tilde{f}$ est continue et strictement croissante et $]1,+\infty[$ est un intervalle ouvert donc $\tilde{f}(]1,+\infty[) =]\tilde{f}(1), \lim\limits_{x\to+\infty} \tilde{f}(x)[=]1, \frac{\pi^2}{4}[$.

6. On pose $g(x) = \tilde{f}(x) - x$. Sachant que $\tilde{f}$ admet exactement 3 points fixes, compléter (à l'aide de **Q4.**) le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ suivant

Correction :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Partie II - Étude d'une suite récurrente

Soit (u_n) la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \tilde{f}(u_n). \end{cases}$

1. On pose $u_0 \in [0,1[$.

(a) Montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n < 1$.

Correction : Initialisation à $n = 0$: il s'agit de l'hypothèse sur u_0.

Hérédité : on utilise **5(d)iii.** Soit $n \geq 0$ tel que $u_n \in [0, 1[$. Alors $u_{n+1} = \tilde{f}(u_n) \in \tilde{f}([0, 1[) = [0, 1[$.

On conclut que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n < 1$.

(b) Préciser la monotonie de (u_n).

Correction : On cherche le signe de $u_{n+1} - u_n = \tilde{f}(u_n) - u_n = g(u_n) \geq 0$. D'après la table de signe, (u_n) est décroissante.

(c) En déduire que (u_n) converge vers une limite ℓ à préciser.

Correction : La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. On en déuit que la suite converge vers un point fixe ℓ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq \ell$. On a donc $1 > u_0 \geq \ell$ donc $\ell = 0$.

2. On suppose que $u_0 > 1$.

(a) Montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$.

Correction : Initialisation à $n = 0$: il s'agit de l'hypothèse sur u_0.

Hérédité : on utilise **5(e).** Soit $n \geq 0$ tel que $u_n > 1$. Alors $u_{n+1} = \tilde{f}(u_n) \in \tilde{f}(]1, +\infty[) =]1, \frac{\pi^2}{4}[\subset]1, +\infty[$.

On conclut que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$.

(b) En fonction du choix de u_0, préciser la monotonie de (u_n).

Correction : Il faut distinguer les cas $u_0 < 2$ et $u_0 > 2$. Comme pour **Q5(e).**, $f(]1, 2[) =]1, 2[$ et $f(]2, +\infty[) =]2, \frac{\pi^2}{4}[$.

- D'après la table de signe, si $1 < u_0 < 2$ alors la suite est croissante.
- D'après la table de signe, si $2 < u_0$ alors la suite est décroissante.
- Si $u_0 = 2$ alors la suite est constante.

(c) Montrer que quelque soit le choix de u_0, la suite (u_n) converge vers $\ell' = 2$.

Correction : • Si $1 < u_0 < 2$ alors la suite est croissante et majorée par 2 donc converge. La limite verifie $1 < \ell' \geq 0$ Le seul choix possible est $\ell' = 2$.

• Si $2 < u_0$ alors la suite est décroissante et minorée par 2. D'après le théorèmes de comparaison : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2 \ \Rightarrow\ \ell' \geq 2$. Le seul choix possible est $\ell' = 2$.

• Si $u_0 = 2$ alors la suite est constante donc convergente vers $\ell' = 2$.

3. (a) Que peut-on conclure lorsque $u_0 = 1$?

Correction : Comme il s'agit d'un point fixe, la suite est constante donc converge vers 1.

(b) Que peut-on conclure lorsque $u_0 < 0$?

Correction : Comme la fonction est paire :

$si - 1 > u_0 > 0$, alors $u_1 \in [0, 1[$ et la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

$si u_0 = -1$, alors $u_1 = 1$ et la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est constante donc converge vers 1.

$si u_0 < -1$, alors $u_1 > 1$ et la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 2.

Partie III - Étude d'une partie non vide de $\mathbb{R}$

Soient (v_n) et (w_n) deux suites récurrentes définies par $\begin{cases} v_{n+1} = \widetilde{f}(v_n) \text{ et } v_0 = \frac{3}{2}. \\ w_{n+1} = \widetilde{f}(w_n) \text{ avec } w_0 = 3. \end{cases}$

On définit l'ensemble $A := \{v_n - w_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$.

1. En utilisant la monotonie de (v_n) et (w_n), ordonner les éléments de l'ensemble A.
   Correction : Comme $v_0 = \frac{3}{2} \in]1, 2[$, la suite (v_n) est croissante et converge vers 2 donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_0 \leq v_n \leq 2$. Comme $w_0 = 3 \in]2, +\infty[$, la suite (w_n) est décroissante et converge vers 2 donc $\forall n \in \mathbb{N},\ w_0 \geq w_n \geq 2 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ -w_0 \leq -w_n \leq -2$. En sommant les résultats on obtient
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_0 - w_0 = -\frac{3}{2} \leq v_n - w_n \leq 2 - 2 = 0}.$$

2. Justifier que $\sup A$ existe.
   Correction : D'après la question précédente, l'ensemble A est une partie non vide ($v_0 - w_0 = -\frac{3}{2} \in A$) et majorée de $\mathbb{R}$ donc $\sup A$ existe d'après l'axiome de la borne sup.
3. Rappeler la caractérisation avec quantificateurs de $\sup A$.
   Correction :
   $$\begin{cases} 1)\ \forall x \in A,\ x \leq \sup A \\ 2)\ \forall t < \sup A,\ \exists\, x \in A,\ x > t\ . \end{cases}$$

4. À l'aide de cette caractérisation, démontrer que $\sup A = 0$.
   Correction : • On a déjà justifié que 0 est un majorant de A.
   • On montre que 0 est le plus petit des majorants : comme $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - w_n = 0$, on a
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow -\varepsilon < v_n - w_n < \varepsilon)$$
   On applique la définition de la limite à $\varepsilon = -t > 0$ et on prend $n = N + 1$
   $$\forall t < 0, \exists n = N + 1 \in \mathbb{N},\ t = -\varepsilon < v_n - w_n = x.$$

5. L'ensemble A admet-il un plus petit élément ? un plus grand élément ?
   Correction : Le plus petit élément est le premier terme $v_0 - w_0 = -\frac{3}{2}$.
   L'ensemble A n'admet pas de plus grand élément. Par l'absurde, supposons que $\max A$ existe alors $\max A = \sup A = 0$ et il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_n - w_n = 0 \Leftrightarrow v_n = w_n$. Comme f est bijective sur $]1, +\infty[$, on aurait $f^{-1}(v_n) = f^{-1}(w_n) \Rightarrow v_{n-1} = w_{n-1} \ldots \Rightarrow v_0 = w_0$. Ce qui est faux.

Exercice 2 (Barème approximatif : 5 points)

Soient (S_n) et (T_n) deux séries définies pour $n \geq 1$ par
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{4k - 1}.$$

1. À l'aide des règles de Riemann, justifier que la série (S_n) converge.

Correction : le terme général est équivalent à $\frac{1}{4n^2}$ donc la série converge d'après les règles de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

2. Sachant que $\dfrac{2}{4k^2-1} = \dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+1}$, simplifier l'expression de S_n et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{2}$.

   Correction :

$$2S_n = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2k+1} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$$

   D'où $S_n \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}$.

3. (a) Montrer que les suites (T_{2n}) et (T_{2n+1}) sont adjacentes.

   Correction : • Monotonie de (T_{2n}) :

$$T_{2n+2} - T_{2n} = \frac{1}{8n+7} - \frac{1}{8n+3} = \frac{-4}{(8n+7)(8n+3)} < 0.$$

   La suite (T_{2n}) est décroissante.

   • Monotonie de (T_{2n+1}) :

$$T_{2n+3} - T_{2n+1} = -\frac{1}{8n+11} + \frac{1}{8n+7} = \frac{4}{(8n+7)(8n+11)} > 0.$$

   La suite (T_{2n+1}) est croissante.

   • De plus $T_{2n+1} - T_{2n} = -\frac{1}{8n+3} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

   Conclusion : Les suites (T_{2n+1}) et (T_{2n}) sont adjacentes.

   (b) En déduire que la série (T_n) converge. *(On ne demande pas de calculer la limite qui vaut $\frac{\sqrt{2}}{8}\left(\ln(3+2\sqrt{2}) - \pi\right) \approx -0.2437$.)*

   Correction : Si (T_{2n}) et (T_{2n+1}) sont adjacentes les deux suites extraites ont même limite. Dans ce cas, on sait que la suite (T_n) converge.

4. La série (T_n) est-elle absolument convergente ?

   Correction : Non, car en valeur absolue le terme général est équivalent à $\frac{1}{4n}$ donc la série diverge d'après les règles de Riemann avec $\alpha = 1$.