

Nom :

Prénom :

MT02 - Médian (1h30 min) - P2026

Aucun document ni calculatrice.

La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

NB : pour un total de 20 points, choisir de traiter au dos de la feuille :

- soit l'exercice 1 - parties III ;
- soit l'exercice 2.

Exercice 1 (Barème approximatif : (9,6,5) points)

Soient f la fonction définie, dérivable et paire sur \mathbb{R}^* par $f(x) = x^2 \left(\sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)\right)^2$.

On admet que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{2f(x)}{x} - \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

Partie I - Prolongement par continuité de f

1. Justifier que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.
2. Montrer, à l'aide des suites, que $x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.
3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{4}$.

4. Compléter la table de valeur ci-contre :

x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
$f(x)$			$\frac{27}{16}$		

5. (a) Justifier que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction \tilde{f} définie et continue sur \mathbb{R} à préciser.
 (b) La fonction \tilde{f} est-elle dérivable en 0 ?
 (c) Si oui, la fonction dérivée \tilde{f}' est-elle continue en 0 ?
 (d) i. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour la fonction \tilde{f} sur $[a, b]$, avec $a < b$.
 ii. Montrer que $\forall y \in]0, 1[, \exists x \in]0, 1[, y = \tilde{f}(x)$.
 iii. En déduire que $\tilde{f}([0, 1]) = [0, 1]$. (*Indication : procéder par double inclusion.*)
 (e) Sachant que \tilde{f} est strictement croissante sur $]1, +\infty[$, déterminer $\tilde{f}([1, +\infty[)$.
6. On pose $g(x) = \tilde{f}(x) - x$. Sachant que \tilde{f} admet exactement 3 points fixes, compléter (à l'aide de **Q4.**) le tableau de signe de $g(x)$ sur \mathbb{R} suivant

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$		0	0	0	

Partie II - Étude d'une suite récurrente

Soit (u_n) la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \tilde{f}(u_n). \end{cases}$

- On pose $u_0 \in [0, 1[$.
 - Montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < 1$.
 - Préciser la monotonie de (u_n) .
 - En déduire que (u_n) converge vers une limite ℓ à préciser.
- On suppose que $u_0 > 1$.
 - Montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.
 - En fonction du choix de u_0 , préciser la monotonie de (u_n) .
 - Montrer que quelque soit le choix de u_0 , la suite (u_n) converge vers $\ell' = 2$.
- Que peut-on conclure lorsque $u_0 = 1$?
 - Que peut-on conclure lorsque $u_0 < 0$?

Partie III - Étude d'une partie non vide de \mathbb{R}

Soient (v_n) et (w_n) deux suites récurrentes définies par $\begin{cases} v_{n+1} = \tilde{f}(v_n) \text{ et } v_0 = \frac{3}{2}. \\ w_{n+1} = \tilde{f}(w_n) \text{ avec } w_0 = 3. \end{cases}$

On définit l'ensemble $A := \{v_n - w_n ; n \in \mathbb{N}\}$.

- En utilisant la monotonie de (v_n) et (w_n) , ordonner les éléments de l'ensemble A .
- Justifier que $\sup A$ existe.
- Rappeler la caractérisation avec quantificateurs de $\sup A$.
- À l'aide de cette caractérisation, démontrer que $\sup A = 0$.
- L'ensemble A admet-il un plus petit élément ? un plus grand élément ?

Exercice 2 (Barème approximatif : 5 points)

Soient (S_n) et (T_n) deux séries définies pour $n \geq 1$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{4k - 1}.$$

- À l'aide des règles de Riemann, justifier que la série (S_n) converge.
- Sachant que $\frac{2}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2k - 1} - \frac{1}{2k + 1}$, simplifier l'expression de S_n et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2}$.
- Montrer que les suites (T_{2n}) et (T_{2n+1}) sont adjacentes.
 - En déduire que la série (T_n) converge. (On ne demande pas de calculer la limite qui vaut $\frac{\sqrt{2}}{8} (\ln(3 + 2\sqrt{2}) - \pi) \approx -0.2437$.)
- La série (T_n) est-elle absolument convergente ?