MT02 - Corrigé du Test 1 - P2026

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 (Barème approximatif : (5 points)
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soient P et Q deux propositions. On définit le connecteur logique $\otimes$, appelé *"ou exclusif"*, par :
$$P \otimes Q := \text{« } (P \text{ et non } Q) \text{ ou } (\text{non } P \text{ et } Q) \text{ »}.$$
Les équivalences suivantes sont-elles toujours vraies ? Justifier !
   (a) $\text{non}\,(P \otimes Q) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{non}\,P \;\otimes\; \text{non}\,Q))$.
   Correction : $(\text{non}\,P \;\otimes\; \text{non}\,Q) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{non}\,P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et non}\,Q) \quad \Leftrightarrow \quad P \otimes Q$.
   Il n'y a donc pas équivalence. C'est même toujours faux.
   (b) $\text{non}\,(P \otimes Q) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{non}\,P \;\otimes\; Q)$.
   Correction : $\text{non}\,(P \otimes Q) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{non}\,P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou non}\,Q)$.
   On applique les règles de distribution :
$$\begin{aligned} \text{non}\,(P \otimes Q) \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{non}\,P \text{ et } P) \text{ ou } (\text{non}\,P \text{ et non}\,Q) \text{ ou } (Q \text{ et } P) \text{ ou } (Q \text{ et non}\,Q) \\ &\Leftrightarrow \quad (\text{non}\,P \text{ et non}\,Q) \text{ ou } (Q \text{ et } P) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{non}\,P \;\otimes\; Q) \end{aligned}$$
   L'équivalence est toujours vraie.

2. Préciser si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier !
   (a) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}\backslash\{x\},\ \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1$.
   Correction : C'est phrase est fausse car la négation est vraie :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}\backslash\{x\},\ \cos^2(x) + \sin^2(y) \neq 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) - \cos^2(y) \neq 0$.
   Poser $y \in \mathbb{R}\backslash\{x + n\pi, -x + n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$ par exemple.
   Ou bien on précise qu'on aurait $y \mapsto 1 - \sin^2(y)$ qui est constante sur $\mathbb{R}\backslash\{x\}$, ce qui est faux.
   (b) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}\backslash\{x\},\ \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1$.
   Correction : Cette phrase est vraie avec $y = x + 2\pi$.

Exercice 2 (Barème approximatif : (5 points)
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_n = \frac{2n+3}{3n+1}$.

1. Rappeler la définition avec quantificateurs de « la suite (u_n) converge ».
   Correction : il existe $\ell \in \mathbb{R}$,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n > N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

2. À l'aide de cette définition, montrer que (u_n) converge vers une limite q à préciser.

Correction : La limite doit être $q = \frac{2}{3}$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on résout $|u_n - \frac{2}{3}| < \varepsilon$.

$$u_n - \frac{2}{3} = \frac{3(2n+3) - 2(3n+1)}{3(3n+1)} = \frac{7}{3(3n+1)}$$

$$|u_n - \frac{2}{3}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{7}{3(3n+1)} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{7}{3\varepsilon} < 3n+1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{3}\left(\frac{7}{3\varepsilon} - 1\right) := \alpha.$$

On pose $N = E(\alpha) + 1$ et on a $n > N \Rightarrow n > \alpha \Rightarrow |u_n - \frac{2}{3}| < \varepsilon$.

3. Compléter les pointillés (par $\leq$ ou $\geq$) : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad q \quad \ldots \quad u_n$.
   Correction : D'après les calculs précédents, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - \frac{2}{3} \geq 0 \Leftrightarrow q = \frac{2}{3} \quad \leq \quad u_n$.

4. Préciser dans chacun des cas suivants si la suite (v_n) est convergente (justifier votre réponse).
   (a) pour $n \geq 0$, on pose $v_{2n} = 3$ et $v_{2n+1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$.
   Correction : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n} = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n+1} = \frac{1}{1-q} = 3$. On en déduit que (v_n) converge vers 3.
   (b) pour $n \geq 0$, on pose $v_{2n} = 3$ et $v_{2n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Correction : D'après **Q3.**, $v_{2n+1} \geq (n+1) \times \frac{2}{3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc (v_{2n+1}) tend vers $+\infty$ et (v_n) est divergente.

Exercice 3 (Barème approximatif : (10 points)
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On note $\vec{x} = (x_1, x_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Soit f et g deux applications définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\quad f(\vec{x}) = \big(x_1 + x_2 \,,\, x_1 + x_2\big) \quad$ et $\quad g(\vec{x}) = \big(\lambda x_1 - x_2 \,,\, x_2 - x_1\big)$.
   (a) Donner la définition de « f admet une application réciproque ».
   Correction : On dit que f admet une application réciproque s'il existe une application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ satisfaisant $f \circ g = g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$
   (b) Calculer et montrer que $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2,\ f \circ g(\vec{x}) = g \circ f(\vec{x}) = (\lambda - 1)\vec{x}$.
   Correction :
$$f \circ g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} (\lambda x_1 - x_2) + (x_2 - x_1) \\ (\lambda x_1 - x_2) + \lambda(x_1 + x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda - 1)x_1 \\ (\lambda - 1)x_2 \end{pmatrix}$$
$$g \circ f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + x_2) - (x_1 + \lambda x_2) \\ (x_1 + \lambda x_2) - (x_1 + x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda - 1)x_1 \\ (\lambda - 1)x_2 \end{pmatrix}$$
   (c) Pour $\lambda \neq 1$ et sans calculs supplémentaires, en déduire que f est bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   Correction : On remarque que f admet pour application réciproque $\frac{1}{\lambda-1}g$. Donc f est bijective.
   (d) Écrire, à l'aide des quantificateurs, la négation de « g est surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ ».
   Correction : $\exists y \in \mathbb{R}^2,\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2,\ y \neq g(\vec{x})$.
   (e) Pour $\lambda = 1$, montrer que g n'est pas surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Correction : Dans ce cas, on a $g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$. On pose $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. En sommant les deux composantes, on a l'équation $\big(\vec{y} = g(\vec{x})\big) \Rightarrow (0 = 1)$ ce qui est absurde.

2. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose $B = \{|x-y|;\ (x,y) \in A \times A\}$.
   (a) Montrer que B admet un plus petit élément à préciser.
   Correction : On montre que $\min B = 0$. En effet, puisque $A \neq \varnothing$, $\exists\, x \in A$. Avec $x = y$, on obtient $|x-y| = 0 \in B$ et $\forall (x,y) \in A \times A, |x-y| \geq 0$.
   (b) Justifier que $\forall (x,y) \in A \times A,\ |x-y| \leq \sup A - \inf A$.
   Correction : Comme A est non vide et borne, $\sup A$ et $\inf A$ existent et $\forall x \in A, \inf A \leq x \leq \sup A$. Par multiplication par (-1), on a aussi $\forall y \in A, -\sup A \leq y \leq -\inf A$. Par conséquent,
   $$\forall (x,y) \in A, -(\sup A - \inf A) \leq x - y \leq \sup A - \inf A \Leftrightarrow |x-y| \leq \sup A - \inf A.$$
   (c) Montrer que B admet une borne supérieure et que $\sup B = \sup A - \inf A$.
   (Indication : écrire $\forall x \in A,\ \forall y \in A,\ x \geq y - |x-y|$.)
   Correction : L'ensemble B est non vide ($0 \in B$) et majoré par $(\sup A - \inf A)$ donc B admet une borne supérieure notée $\sup B$. On part de $\forall x \in A,\ \forall y \in A,\ x \geq y - |x-y|$ qui est toujours vrai. On en déduit que $\forall x \in A,\ \forall y \in A,\ x \geq y - \sup B \Leftrightarrow x + \sup B \geq y$. Comme $\sup A$ est le plus majorant de A, on a $\forall x \in A,\ x + \sup B \geq \sup A \Leftrightarrow x \geq \sup A - \sup B$. Comme $\inf A$ est le plus grand des minorants de A on en déduit que $\inf A \geq \sup A - \sup B$. Ce qui se réécrit $\sup B \geq \sup A - \inf A$.
   On a donc égalité.