MT02 - Test 1 (45min) - P2026

Aucun document ni calculatrice.
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 (Barème approximatif : (5 points)
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. Soient P et Q deux propositions. On définit le connecteur logique $\otimes$, appelé *"ou exclusif"*, par :
$$P \otimes Q := \text{« } (P \text{ et non } Q) \text{ ou } (\text{non } P \text{ et } Q) \text{ »}.$$
Les équivalences suivantes sont-elles toujours vraies ? Justifier !
   (a) $\text{non}\,(P \otimes Q) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{non}\,P \ \otimes \ \text{non}\,Q)$.
   (b) $\text{non}\,(P \otimes Q) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{non}\,P \ \otimes \ Q)$.
2. Préciser si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier !
   (a) $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R}\backslash\{x\},\ \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1.$
   (b) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R}\backslash\{x\},\ \cos^2(x) + \sin^2(y) = 1.$

Exercice 2 (Barème approximatif : (5 points)
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_n = \frac{2n+3}{3n+1}$.

1. Rappeler la définition avec quantificateurs de « la suite (u_n) converge ».
2. À l'aide de cette définition, montrer que (u_n) converge vers une limite q à préciser.
3. Compléter les pointillés (par $\leq$ ou $\geq$) :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad q \quad \ldots \quad u_n.$$
4. Préciser, dans chacun des cas suivants, si la suite (v_n) est convergente (justifier votre réponse).
   (a) pour $n \geq 0$, on pose $v_{2n} = 3$ et $v_{2n+1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$.
   (b) pour $n \geq 0$, on pose $v_{2n} = 3$ et $v_{2n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Exercice 3 (Barème approximatif : (10 points)
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On note $\vec{x} = (x_1, x_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre. Soient f et g deux applications définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\quad f(\vec{x}) = \big(x_1 + x_2\ ,\ x_1 + \lambda x_2\big) \quad$ et $\quad g(\vec{x}) = \big(\lambda x_1 - x_2\ ,\ x_2 - x_1\big)$.
   (a) Donner la définition de « f admet une application réciproque ».
   (b) Calculer et montrer que $\forall\, \vec{x} \in \mathbb{R}^2,\ f \circ g(\vec{x}) = g \circ f(\vec{x}) = (\lambda - 1)\vec{x}$.
   (c) Pour $\lambda \neq 1$ et sans calculs supplémentaires, en déduire que f est bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (d) Écrire, à l'aide des quantificateurs, la négation de « g est surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ ».
   (e) Pour $\lambda = 1$, montrer que g n'est pas surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose $B = \{|x - y|;\ (x, y) \in A \times A\}$.
   (a) Montrer que B admet un plus petit élément à préciser.
   (b) Justifier que $\forall (x, y) \in A \times A,\ |x - y| \leq \sup A - \inf A$.
   (c) Montrer que B admet une borne supérieure et que $\sup B = \sup A - \inf A$.
   (Indication : on pourra utiliser le fait que $\forall y \in A,\ \forall x \in A,\ y + \sup B \geq x$.)