

Aucun document ni calculatrice.

La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 (10 min - Barème approximatif : 7 points)

1. Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en $a = 0$ de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.

Correction : il existe une fonction ε_1 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)$, avec $\varepsilon_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

2. Donner la formule de Taylor-Young de la fonction $x \mapsto \cos(x)$ en $a = 0$ à l'ordre 3.

Correction : il existe une fonction ε_2 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_2(x)$, avec $\varepsilon_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

3. (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ fixé. Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en $a = 0$ de la fonction $t \mapsto (1+t)^\alpha$.

Correction : il existe une fonction ε_3 telle que

$$\forall t > -1, (1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}t^3 + t^3\varepsilon_3(t), \quad \text{avec } \varepsilon_3(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

- (b) En déduire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en $a = 0$ de la fonction $x \mapsto (1+3x)^{\frac{2}{3}}$.

Correction : On pose $\alpha = \frac{2}{3}$ et $t = 3x$ dans la formule précédente et on obtient : il existe une fonction ε_4 telle que

$$\begin{aligned} \forall x > -\frac{1}{3}, (1+3x)^{\frac{2}{3}} &= 1 + \frac{2}{3} \times (3x) + \frac{\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-1)}{2}(3x)^2 + \frac{\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-1)(\frac{2}{3}-2)}{6}(3x)^3 + x^3\varepsilon_4(x) \\ &= 1 + 2x - x^2 + \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon_4(x), \quad \text{avec } \varepsilon_4(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

4. Soit β un paramètre réel. Pour $x \in I =]-\frac{1}{3}, +\infty[$, on pose $f(x) = (1+3x)^{\frac{2}{3}} + \beta \cos(x) - 2 \sin x$.

- (a) Déterminer (en fonction de β) les constantes c_2 et c_3 de sorte que

$$\forall x \in I, f(x) = (\beta + 1) + c_2x^2 + c_3x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Correction :

$$\begin{aligned} f(x) &= [1 + \cancel{2x} - x^2 + \frac{4}{3}x^3] + \beta[1 - \frac{x^2}{2}] - 2[x - \frac{x^3}{6}] + x^3\varepsilon_5(x) \\ &= (1 + \beta) - (\beta + 2)\frac{x^2}{2} + \frac{5}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

- (b) Pour quelle valeur de β , la fonction f est-elle un infiniment petit au voisinage de $a = 0$. Préciser sa partie principale.

Correction : • $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1 + \beta$. La quantité $f(x)$ est un infiniment petit au voisinage de 0 si et seulement si $\beta = -1$.

• Dans ce cas, la partie principale de $f(x)$ est $-\frac{x^2}{2}$.

Exercice 2 (15 min - Barème approximatif : 7 points)

Soit f la fonction définie sur $]3, +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x-3}$.

1. (a) Sachant que $\forall t > 0, t + \frac{1}{t} \geq 2$, montrer que $\forall x > 3, f'(x) \geq 3$. (*Indication : écrire $x = (x-3) + 3$.*)

Correction : La fonction f est continue sur $]3, +\infty[$ mais dérivable sur $]3, +\infty[$ avec

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{x-3} + \frac{x}{2\sqrt{x-3}} = \sqrt{x-3} + \frac{(x-3) + 3}{2\sqrt{x-3}} \\ &= \sqrt{x-3} + \frac{\sqrt{x-3}}{2} + \frac{3}{2\sqrt{x-3}} \\ &= \frac{3}{2} \left(\sqrt{x-3} + \frac{1}{\sqrt{x-3}} \right) \geq \frac{3}{2} \times 2 \text{ en posant } t = \sqrt{x-3}. \end{aligned}$$

- (b) En déduire que f admet une application réciproque g définie et continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. (*On ne demande pas de déterminer l'expression de $g(x)$.*)

Correction : La fonction f est continue sur $]3, +\infty[$ et dérivable sur $]3, +\infty[$ avec $\forall x > 3, f'(x) > 0$. Par conséquent f est strictement croissante donc bijective de $]3, +\infty[$ sur $\text{Im } f = [f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [0, +\infty[$. Elle admet une application réciproque $g = f^{-1}$ définie et continue de $\text{Im } f = [0, +\infty[$ vers $D_f =]3, +\infty[$ (car f l'est sur $]3, +\infty[$) et dérivable sur $]0, +\infty[$ (car f l'est sur $]3, +\infty[$ et $f(3) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 3$).

- (c) Exprimer la fonction dérivée g' en fonction de f' et g .

Correction : $\forall x > 0, g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$.

- (d) Calculer $g(4)$ et $g'(4)$. Puis déterminer $K = \max_{x \in \Omega} |g'(x)|$.

Correction : $f(4) = 4 \Leftrightarrow g(4) = 4$ et $g'(4) = \frac{1}{f'(g(4))} = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{3}$.

$$\forall x > 3, f'(x) \geq 3 \Rightarrow \forall x > 0, g'(x) \leq \frac{1}{3} = g'(4)$$

On en déduit que $K = \max_{x \in \Omega} |g'(x)| = \frac{1}{3}$.

2. (a) Montrer que $\forall (x, x') \in I \times I, |g(x) - g(x')| \leq K|x - x'|$.

Correction : On applique l'égalité des accroissements finis à f entre $x \in [0, +\infty[$ et $x' \in [0, +\infty[$.

- Si $x = x'$, on a $|g(x) - g(x')| = 0 = K|x - x'|$. L'égalité entraîne l'inégalité.
- Pour $x \neq x'$, sans perte de généralité, on peut supposer que $x < x'$. L'application f est continue sur $[x, x']$ et dérivable sur $]x, x'[$ donc il existe $c \in]x, x'[$, $g(x) - g(x') = g'(c)(x - x')$. En valeur absolue, cela entraîne

$$|g(x) - g(x')| = |g'(c)||x - x'| \leq K|x - x'|.$$

- (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_{n+1} = g(u_n)$, avec $u_0 \geq 4$ fixé, converge vers une limite ℓ à préciser.

Correction : Tout d'abord on note que $0 < K = \frac{1}{3} < 1$ et que g admet un point fixe $\ell = 4$ d'après **Q1(d)**. De plus la suite est bien définie car $g([4, +\infty[) = [4, +\infty[$.

Démonstration vue en cours.

(i) **étape 1** : on pose $x = u_n$ et $x' = \ell$ dans **2.a**) et on obtient

$$|g(u_n) - g(\ell)| = |u_{n+1} - \ell| \leq K|u_n - \ell|.$$

(ii) **étape 2** : on montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq K^n |u_0 - \ell|$

Initialisation à $n = 0$: on a $|u_0 - \ell| = K^0 |u_0 - \ell|$, l'égalité entraîne l'inégalité.

Hérédité : Soit $n \geq 0$, tel que $|u_n - \ell| \leq K^n |u_0 - \ell|$. D'après l'étape 1 on a
 $|u_{n+1} - \ell| \leq K|u_n - \ell| \xRightarrow{\text{par Hyp. Réc.}} |u_{n+1} - \ell| < K \times K^n |u_0 - \ell| = K^{n+1} |u_0 - \ell|.$

La proposition est vraie au rang $n + 1$.

(iii) **étape 3** : La suite de terme général $K^n |u_0 - \ell|$ est une suite géométrique de raison $0 < K < 1$ donc elle converge vers 0. D'après le corollaire 1 du théorème des gendarmes, la suite $u_n - \ell \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. De façon équivalente, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$.

Exercice 3 (15 min - Barème approximatif : 6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2 - \lambda(x^2 - x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Soit $0 \leq a < b$. Énoncer le théorème de Rolle pour la fonction f sur $[a, b]$.

Correction : Soit f une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec $f(a) = f(b)$.

Alors, $\exists c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

2. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Correction : Par somme/produit de fonctions usuelles, f est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$. De plus $f(0) = 0 = f(1)$. D'après le théorème de Rolle, $\exists c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

3. On pose $u(x) = 1 + \ln x - x$. À l'aide d'un tableau de variation, montrer que $\max_{x \in]0, +\infty[} u(x) = 0$.

Correction : $u'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

| | | | |
|---------|-----------|---|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $u'(x)$ | | + | - |
| $u(x)$ | $-\infty$ | 0 | $-\infty$ |

4. Montrer que pour $x \neq 0$, $f''(x) = \frac{2u(x)}{x} + 2(1 - \lambda)$.

Correction : $f'(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x - \lambda(2x - 1)$

$$f''(x) = 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2\lambda = \frac{2(\ln x - x + 1)}{x} + 2 - 2\lambda = \frac{2u(x)}{x} + 2(1 - \lambda).$$

5. (a) Sous quelle condition sur λ , la fonction f est-elle concave sur $[0, +\infty[$?

Correction : La fonction f est concave si et seulement $\forall x > 0, f''(x) \leq 0$. D'après **Q3**, comme $x > 0$, on peut déduire que $\max_{x \in]0, +\infty[} \frac{u(x)}{x} = 0$ et $\max_{x \in]0, +\infty[} f''(x) = 2(1 - \lambda)$. On

conclut que f est concave si et seulement $1 - \lambda \leq 0$, soit $\lambda \geq 1$.

(b) Dans ce cas, justifier que f admet un extremum global sur $[0, +\infty[$ dont on précisera la nature.

Correction : D'après **Q1** et **Q5(a)**, pour tout $\lambda \geq 1$, f admet une unique maximum local qui est global sur $[0, +\infty[$ et vaut $f(c)$.