

Aucun document ni calculatrice.

La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !

Exercice 1 (10 min - Barème approximatif : 7 points)

1. Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en $a = 0$ de la fonction $x \mapsto \sin(x)$.
2. Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en $a = 0$ de la fonction $x \mapsto \cos(x)$.
3. (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ fixé. Donner la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en $a = 0$ de la fonction $t \mapsto (1 + t)^\alpha$.
 (b) En déduire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en $a = 0$ de la fonction $x \mapsto (1 + 3x)^{\frac{2}{3}}$.
 (*Attention au changement de variable $t = 3x$.*)
4. Soit β un paramètre réel. Pour $x \in I =]-\frac{1}{3}, +\infty[$, on pose $f(x) = (1 + 3x)^{\frac{2}{3}} + \beta \cos(x) - 2 \sin x$.
 (a) Déterminer (en fonction de β) les constantes c_2 et c_3 de sorte que

$$\forall x \in I, f(x) = (\beta + 1) + c_2 x^2 + c_3 x^3 + x^3 \varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

 (b) Pour quelle valeur de β , la fonction f est-elle un infiniment petit au voisinage de $a = 0$.
 Préciser sa partie principale.

Exercice 2 (15 min - Barème approximatif : 7 points)

Soit f la fonction définie sur $[3, +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x-3}$.

1. (a) Sachant que $\forall t > 0, t + \frac{1}{t} \geq 2$, montrer que $\forall x > 3, f'(x) \geq 3$. (*Indication : écrire $x = (x-3) + 3$.*)
 (b) En déduire que f admet une application réciproque g définie et continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. (*On ne demande pas de déterminer l'expression de $g(x)$.*)
 (c) Exprimer la fonction dérivée g' en fonction de f' et g .
 (d) Calculer $g(4)$ et $g'(4)$. Puis déterminer $K = \max_{x \in \Omega} |g'(x)|$.
2. (a) Montrer que $\forall (x, y) \in I \times I, |g(x) - g(y)| \leq K|x - y|$.
 (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_{n+1} = g(u_n)$, avec $u_0 \geq 4$ fixé, converge vers une limite ℓ à préciser.

Exercice 3 (15 min - Barème approximatif : 6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2 - \lambda(x^2 - x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Soit $0 \leq a < b$. Énoncer le théorème de Rolle pour la fonction f sur $[a, b]$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.
3. On pose $u(x) = 1 + \ln x - x$. À l'aide d'un tableau de variation, montrer que $\max_{x \in]0, +\infty[} u(x) = 0$.
4. Montrer que pour $x \neq 0, f''(x) = \frac{2u(x)}{x} + 2(1 - \lambda)$.
5. (a) Sous quelle condition sur λ , la fonction f est-elle concave sur $[0, +\infty[$?
 (b) Dans ce cas, justifier que f admet un extremum global sur $[0, +\infty[$ dont on précisera la nature.