

**Aucun document ni calculatrice.**

**La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses ou démonstrations !**

Les exercices 1, 2 et 3 sont indépendants.

**Exercice 1** - (Barème approximatif : 9 points - Temps de composition : 50 min)

1. Soit  $G$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par  $G(x) = \int_1^x e^{\sqrt{t-1}} dt$ .
  - (a) À l'aide du changement de variable  $u = \sqrt{t-1}$ , montrer que  $G(x) = \int_0^{\sqrt{x-1}} 2u e^u du$ .
  - (b) À l'aide d'une intégration par partie, déterminer l'expression algébrique de  $G(x)$ .
2. (a) Déterminer trois nombres entiers relatifs  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  tels que

$$\frac{3x^2 - 2x + 17}{(x-1)(x+2)(x^2 - 2x + 3)} = \alpha_1 \times \frac{1}{x-1} + \alpha_2 \times \frac{1}{x+2} + \alpha_3 \times \frac{x-1}{x^2 - 2x + 3}.$$

- (b) En déduire l'expression algébrique d'une primitive  $F$  de  $f$  définie sur  $I = ]1, +\infty[$ .
3. Déterminer  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  tels que

$$\int \frac{x+2}{x^2 - 2x + 3} dx = \beta_1 \ln(x^2 - 2x + 3) + \beta_2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

4. Soit  $b$  une application définie sur l'intervalle  $I$ . On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \quad (x^3 - x + 6)y' - \frac{3x^2 - 2x + 17}{x-1}y = (x-1)^3 b(x), \quad \text{avec } x \in I.$$

avec  $(x^3 - x + 6) = (x+2)(x^2 - 2x + 3)$ .

- (a) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à  $(E)$ .
  - (b) Pour toute application continue  $b$  sur  $I$  admettant une primitive  $B$ , justifier qu'une solution particulière de  $(E)$  est

$$y_p(x) = \frac{(x-1)^3 B(x)}{(x+2)(x^2 - 2x + 3)}.$$

- (c) Déterminer l'unique solution du système suivant

$$\begin{cases} (x^3 - x + 6)y' - \frac{3x^2 - 2x + 17}{x-1}y = (x-1)^3 \left( e^{\sqrt{x-1}} + \frac{x+2}{x^2 - 2x + 3} \right), & x \in I \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y(x)}{(x-1)^3} = 0. \end{cases}$$

- (d) En déduire que  $y$  est un infiniment petit au voisinage de  $a = 1$  d'ordre 4 dont on précisera la partie principale.

**Exercice 2** - (Barème approximatif : 6 points - Temps de composition : 35 min)

On définit deux applications sur  $] -1, +\infty[ \setminus \{0\}$  par  $f_1(x) = \frac{2 \ln(1+x) - \sin(2x)}{x}$  et  $f_2(t) = \frac{2-t+7t^2}{2+3t+t^2}$ .

1. Déterminer le développement limité de  $f_1$  au voisinage de 0 à l'ordre 3.
2. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x) + x - 2x^2}{e^x - e^{-x} - 2x} = -\frac{3}{2}$ .
3. À l'aide d'une division selon les puissances croissantes, déterminer le développement limité à l'ordre 3 de  $f_2$  au voisinage de 0.
4. En déduire que le développement limité de  $g = f_2 \circ f_1$  au voisinage de 0 à l'ordre 3 est

$$g(x) = 1 + 2x + 2x^2 - 15x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

5. Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = (x^2 - 3x + 1) \int_0^{\frac{1}{x}} g(t) dt$  et on note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

- (a) Déterminer le développement limité de  $f(x)$  au voisinage de  $+\infty$  sous la forme

$$f(x) = x + a + \frac{b}{x} + \frac{1}{x} \tilde{\varepsilon}\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{avec } \tilde{\varepsilon}(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0,$$

où les valeurs de  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$  sont à préciser.

- (b) i. Donner l'équation de la droite asymptote à  $\mathcal{C}_f$  au voisinage de  $+\infty$ .  
ii. Indiquer la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à son asymptote en  $+\infty$ .

**Exercice 3** - (Barème approximatif : 5 points + 1 point bonus - Temps de composition : 35 min)

On définit la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  définies sur  $D = [0, +\infty[$  par  $f_n(x) = \begin{cases} xe^{\frac{2n^2}{x-n}} & \text{si } 0 \leq x < n, \\ 0 & \text{si } x \geq n. \end{cases}$

1. Montrer que pour tout  $x \in ]0, n[$ , on a  $f'_n(x) = \frac{x^2 - 2x(n+n^2) + n^2}{(x-n)^2} \times e^{\frac{2n^2}{x-n}}$ .
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \max_{x \in D} |f_n(x)|$ . Justifier que  $u_n = f_n(x_n)$  où

$$x_n = n + n^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2}{n}}\right).$$

3. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de  $\sqrt{1+t}$ , montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}$ .
4. (a) Montrer que  $u_n$  est équivalent à  $\frac{1}{2e}e^{-2n}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .  
(b) En déduire que la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément sur  $D$  vers la fonction identiquement nulle.
5. On pose  $I_n = \int_0^n f_n(x) dx$ . Sans calculer  $I_n$ , montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .
6. **Question bonus.** On admet que  $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$ ,  $n^p e^{-2n} \leq (p!)e^{-\frac{p}{2}}$ . À l'aide des règles de Riemann et d'une valeur de  $p$  judicieusement choisie, montrer que  $\sum_{n \geq 1} I_n$  est une série convergente.