

Exercice 1 - (Barème approximatif : 9 points - Temps de composition : 50 min)

1. Soit G la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $G(x) = \int_1^x e^{\sqrt{t-1}} dt$.

(a) À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t-1}$, montrer que $G(x) = \int_0^{\sqrt{x-1}} 2u e^u du$.

Correction : Si besoin, on calcule $t = u^2 + 1$.

- Changement des bornes : $t = x \Leftrightarrow u = \sqrt{x-1}$ et $t = 1 \Leftrightarrow u = \sqrt{1-1} = 0$.
- L'intégrand $e^{\sqrt{t-1}}$ devient e^u .
- Enfin $\frac{dt}{du} = \frac{d[u^2+1]}{du} = 2u$, soit $dt = 2u du$.

$$G(x) = \int_0^x e^u \times 2u du.$$

(b) À l'aide d'une intégration par partie, déterminer l'expression algébrique de $G(x)$.

Correction :

$$G(x) = [2ue^u]_0^{\sqrt{x-1}} - 2 \int_0^{\sqrt{x-1}} e^u du = 2(\sqrt{x-1} - 1)e^{\sqrt{x-1}} + 2.$$

2. (a) Déterminer trois nombres entiers relatifs α_1 , α_2 et α_3 tels que

$$\frac{3x^2 - 2x + 17}{(x-1)(x+2)(x^2 - 2x + 3)} = \alpha_1 \times \frac{1}{x-1} + \alpha_2 \times \frac{1}{x+2} + \alpha_3 \times \frac{x-1}{x^2 - 2x + 3}.$$

Correction : Avec la méthode des résidus de MT03, on obtient

$$\alpha_1 = \left[\frac{3x^2 - 2x + 17}{(x+2)(x^2 - 2x + 3)} \right]_{x=1} = \frac{18}{3 \times 2} = 3$$

$$\alpha_2 = \left[\frac{3x^2 - 2x + 17}{(x-1)(x^2 - 2x + 3)} \right]_{x=-2} = \frac{33}{(-3) \times 11} = -1$$

Enfin, un calcul de limites entraîne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 17}{(x-1)(x+2)(x^2 - 2x + 3)} = 0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \Rightarrow \alpha_3 = -2.$$

(b) En déduire l'expression algébrique d'une primitive F de f définie sur $I =]1, +\infty[$.

Correction : Une primitive de $f(x)$ est

$$F(x) = 3 \ln(x-1) - \ln(x+2) - \ln(x^2 - 2x + 3) = \ln \left(\frac{(x-1)^3}{(x+2)(x^2 - 2x + 3)} \right)$$

3. Déterminer $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x+3} dx = \beta_1 \ln(x^2-2x+3) + \beta_2 \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Correction : On écrit $x+2 = \frac{1}{2} \times (2x+2) + 1$ et $x^2+2x+3 = (x-1)^2+2 = 2 \left(1 + \left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$, puis

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2-2x+3} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+3} dx + 3 \times \int \frac{1}{x^2-2x+3} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+3) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. Soit b une application définie sur l'intervalle I . On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \quad (x^3 - x + 6)y' - \frac{3x^2 - 2x + 17}{x-1}y = (x-1)^3 b(x), \quad \text{avec } x \in I.$$

avec $(x^3 - x + 6) = (x+2)(x^2 - 2x + 3)$.

(a) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à (E).

Correction : • On isole y' :

$$y' = \frac{3x^2 - 2x + 17}{(x-1)(x+2)(x^2-2x+3)}y + \frac{(x-1)^3 b(x)}{(x+2)(x^2-2x+3)}.$$

on pose $a(x) = \frac{3x^2-2x+17}{(x-1)(x+2)(x^2-2x+3)}$ et $b'(x) = \frac{(x-1)^3 b(x)}{(x+2)(x^2-2x+3)}$. La fonction a est bien définie et continue sur I donc admet une primitive déterminée à la question 2 b). La forme générale des solutions de l'équation homogène est

$$y_h(x) = C \exp\left(\ln\left(\frac{(x-1)^3}{(x+2)(x^2-2x+3)}\right)\right) = \frac{C(x-1)^3}{(x+2)(x^2-2x+3)}.$$

(b) Pour toute application continue b sur I admettant une primitive B , justifier qu'une solution particulière de (E) est

$$y_p(x) = \frac{(x-1)^3 B(x)}{(x+2)(x^2-2x+3)}.$$

Correction : À l'aide de la variation de la constante, on sait qu'une solution particulière est

$$y_p(x) = \varphi(x) \times \frac{(x-1)^3}{(x+2)(x^2-2x+3)},$$

où

$$\varphi'(x) = \frac{b'(x)}{\frac{(x-1)^3}{(x+2)(x^2-2x+3)}} = b(x).$$

Pour toute application b continue sur I admettant une primitive B , on peut choisir $\varphi(x) = B(x)$ et la solution particulière est donc de la forme

$$y_p(x) = B(x) \times \frac{(x-1)^3}{(x+2)(x^2-2x+3)},$$

(c) Déterminer l'unique solution du système suivant

$$\begin{cases} (x^3 - x + 6)y' - \frac{3x^2 - 2x + 17}{x - 1}y = (x - 1)^3 \left(e^{\sqrt{x-1}} + \frac{x+2}{x^2 - 2x + 3} \right), & x \in I \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y(x)}{(x-1)^3} = 0. \end{cases}$$

Correction : La forme générale des solutions sur I est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{(x-1)^3 \left(G(x) + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 3) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{x-1}{\sqrt{2}} \right) + C \right)}{(x+2)(x^2 - 2x + 3)}$$

Donc

$$\frac{y(x)}{(x-1)^3} = \frac{\left(G(x) + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 3) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{x-1}{\sqrt{2}} \right) + C \right)}{(x+2)(x^2 - 2x + 3)}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{y(x)}{(x-1)^3} = \frac{\left(G(1) + \frac{1}{2} \ln(2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}(0) + C \right)}{6} = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{\ln(2)}{2}.$$

(d) En déduire que y est un infiniment petit au voisinage de $a = 1$ d'ordre 4 dont on précisera la partie principale.

Correction : Il suffit de calculer

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{y(x)}{(x-1)^4} &= \frac{1}{6} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{G(x) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2-2x+3}{2}\right) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{x-1}{\sqrt{2}} \right)}{x-1} \\ &= \frac{1}{6} \times \lim_{x \rightarrow 1} \left[G(x) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2-2x+3}{2}\right) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan} \left(\frac{x-1}{\sqrt{2}} \right) \right]'_{a=1} \\ &= \frac{1}{6} \times \lim_{x \rightarrow 1} \left[e^{\sqrt{x-1}} + \frac{x+2}{x^2 - 2x + 3} \right]_{a=1} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{3}{2} \right) = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

La partie principale est $\frac{5}{12}(x-1)^4$.

Exercice 2 - (Barème approximatif : 6 points - Temps de composition : 35 min)

On définit deux applications sur $] -1, +\infty[\setminus \{0\}$ par $f_1(x) = \frac{2 \ln(1+x) - \sin(2x)}{x}$ et $f_2(t) = \frac{2-t+7t^2}{2+3t+t^2}$.

1. Déterminer le développement limité de f_1 au voisinage de 0 à l'ordre 3.

Correction :

$$f_1(x) = \frac{2 \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) - \left(2x - \frac{4x^3}{3} \right)}{x} + x^3 \varepsilon(x) = -x + 2x^2 - \frac{x^3}{2} + x^3 \varepsilon(x).$$

2. En déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x) + x - 2x^2}{e^x - e^{-x} - 2x} = -\frac{3}{2}$.

Correction : $e^x - e^{-x} - 2x = (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}) - (1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}) - 2x + x^3\varepsilon(x) = \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$.
On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x) + x - 2x^2}{e^x - e^{-x} - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x^3}{2}}{\frac{x^3}{3}} = -\frac{3}{2}.$$

3. À l'aide d'une division selon les puissances croissantes, déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f_2 au voisinage de 0.

Correction :

2 - t + 7t ²					2 + 3t + t ²
$R_0 :$					$\underbrace{1}_{Q_0} - 2t + 6t^2 - 8t^3$
$R_1 :$					$\underbrace{-2t}_{Q_1} + 6t^2 - 8t^3$
$R_2 - 16t^3 - 6t^4$					$\underbrace{6t^2}_{Q_2} - 8t^3$
$R_3 \dots$					$\underbrace{-8t^3}_{Q_3}$

D'où $f_2(t) = 1 - 2t + 6t^2 - 8t^3 + t^3\varepsilon(t)$.

4. En déduire que le développement limité de $g = f_2 \circ f_1$ au voisinage de 0 à l'ordre 3 est

$$g(x) = 1 + 2x + 2x^2 - 15x^3 + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Correction : Comme $b = f_1(0) = 0$, il suffit de poser $t = -x + x^2 - \frac{x^3}{2}$ dans le DL de f_2 :

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 - 2(-x + x^2 - \frac{x^3}{2}) + 6(-x + x^2 - \frac{x^3}{2})^2 - 8(-x + x^2 - \frac{x^3}{2})^3 + x^3\varepsilon(x) \\ &= 1 + 2x - 4x^2 + x^3 + 6x^2 - 24x^3 + 8x^3 + x^3\varepsilon(x) \\ &= 1 + 2x + 2x^2 - 15x^3 + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

5. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = (x^2 - 3x + 1) \int_0^{\frac{1}{x}} g(t) dt$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- (a) Déterminer le développement limité de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ sous la forme

$$f(x) = x + a + \frac{b}{x} + \frac{1}{x} \tilde{\varepsilon}\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{avec } \tilde{\varepsilon}(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0,$$

où les valeurs de $a \neq 0$ et $b \neq 0$ sont à préciser.

Correction : Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} \int_0^h g(t) dt &= h + h^2 + \frac{2h^3}{3} + h^3\varepsilon(h) \\ \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{x}} g(t) dt &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \\ \Rightarrow f(x) &= (x^2 - 3x + 1) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{3x^3} \right) + \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = x - 2 - \frac{4}{3x} + \frac{1}{x} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

- (b) i. Donner l'équation de la droite asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Correction : L'équation de l'asymptote est $y = x - 2$

- ii. Indiquer la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote en $+\infty$.

Correction : • En $+\infty$, $d(x) = f(x) - (x - 2) = -\frac{4}{3x} + \frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) < 0$. La courbe $\mathcal{C}_f$ est située sous l'asymptote.

Exercice 3 - (Barème approximatif : 5 points + 1 point bonus - Temps de composition : 35 min)

On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ définies sur $D = [0, +\infty[$ par $f_n(x) = \begin{cases} xe^{\frac{2n^2}{x-n}} & \text{si } 0 \leq x < n, \\ 0 & \text{si } x \geq n. \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $x \in]0, n[$, on a $f'_n(x) = \frac{x^2 - 2x(n + n^2) + n^2}{(x - n)^2} \times e^{\frac{2n^2}{x-n}}$.

Correction :

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= e^{\frac{2n^2}{x-n}} + x \times \left(-\frac{2n^2}{(x-n)^2} \right) \times e^{\frac{2n^2}{x-n}} \\ &= e^{\frac{2n^2}{x-n}} \left(1 - \frac{2n^2x}{(x-n)^2} \right) \\ &= e^{\frac{2n^2}{x-n}} \left(\frac{(x-n)^2 - 2n^2x}{(x-n)^2} \right) = \frac{x^2 - 2nx + n^2 - 2xn^2}{(x-n)^2} \times e^{\frac{2n^2}{x-n}} = \frac{x^2 - 2x(n + n^2) + n^2}{(x-n)^2} \times e^{\frac{2n^2}{x-n}} \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \max_{x \in D} |f_n(x)|$. Justifier que $u_n = f_n(x_n)$ où

$$x_n = n + n^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \right).$$

Correction : On commence par résoudre l'équation $f'_n(x) = 0$ sur $]0, n[$. Comme $e^{\frac{2n^2}{x-n}} > 0$ sur $]0, n[$, on trouve

$$x^2 - 2x(n + n^2) + n^2 = 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = 4(n + n^2)^2 - 4n^2 = 8n^3 + 4n^4 = 4n^4 \left(1 + \frac{2}{n} \right) > 0$. Il y a deux solu-

tions dont une seule dans l'intervalle $]0, n[$: $x_n = \frac{2(n + n^2) - \sqrt{\Delta}}{2} = n + n^2 - n^2 \sqrt{1 + \frac{2}{n}}$.

L'autre solution est $x'_n = n + n^2 + n^2 \sqrt{1 + \frac{2}{n}} > n > x_n$ et $f'_n(x)$ est positive à l'extérieur des racines donc :

x	0	x_n	n
$f'_n(x)$		+	-
$f_n(x)$	0	u_n	0

Comme $f_n(x) = 0$ sur $[0, +\infty[$, on a bien $u_n = \max_{x \in]0, n[} |f_n(x)| = \max_{x \in]0, n[} |f_n(x)| = f_n(x_n)$.

3. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $\sqrt{1+t}$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

Correction : Au voisinage de 0, on a $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + t^2 \varepsilon_1(t)$. En posant $t = \frac{2}{n}$, on obtient

$$x_n = n + n^2 - n^2 \left(1 + \frac{2}{2n} - \frac{4}{8n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon_2\left(\frac{1}{n}\right) \right) = +\frac{1}{2} - \varepsilon_2\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

4. (a) Montrer que u_n est équivalent à $\frac{1}{2e}e^{-2n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Correction : Il suffit d'étudier le quotient :

$$\frac{u_n}{\frac{1}{2}e^{-2n}} = 2x_n \times e^{\frac{2n^2}{x_n - n} + 2n} = 2x_n \times e^{\frac{2nx_n}{x_n - n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2x_n = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2nx_n}{x_n - n} = -1 \Rightarrow e^{\frac{2nx_n}{x_n - n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$$

Par produit $\frac{u_n}{\frac{1}{2}e^{-2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$, ce qui signifie que u_n est équivalent à $\frac{1}{2e}e^{-2n}$ en $+\infty$

- (b) En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur D vers la fonction identiquement nulle.

Correction : De toute évidence $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e}e^{-2n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément sur D vers la fonction identiquement nulle.

5. On pose $I_n = \int_0^n f_n(x) dx$. Sans calculer I_n , montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Correction : On utilise, l'encadrement pour tout $x \in]0, n[$: $0 \leq f_n(x) \leq u_n$. On passe au calcul intégrale,

$$0 \leq I_n \leq n \times u_n$$

Or, $n \times u_n = \frac{n}{2e}e^{-2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'après l'échelle de comparaison monôme/exponentielle.

D'après le théorème des gendarmes, $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ également.

6. **Question bonus.** On admet que $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$, $n^p e^{-2n} \leq (p!)e^{-\frac{p}{2}}$. À l'aide des règles de Riemann et d'une valeur de p judicieusement choisie, montrer que $\sum_{n \geq 0} I_n$ est une série convergente.

Correction : Tout d'abord, $\sum_{n \geq 0} I_n$ est une série croissante en tant que somme de termes positifs. Montrons qu'elle est majorée.

Prenons $p = 3$ alors $n^3 e^{-2n} \leq 6e^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow n \times u_n \leq \frac{3}{n^2 e^{\frac{5}{2}}}$ et

$$0 \leq \sum_{k=0}^n I_k \leq \sum_{k=0}^n k \times u_k \leq \sum_{k=0}^n \frac{3}{k^2 e^{\frac{5}{2}}}$$

Or la série de terme général $\frac{1}{2n^2 e^{\frac{5}{2}}}$ est croissante et convergente donc est majorée par sa limite ℓ et $\sum_{n \geq 0} I_n$ aussi. D'après les théorèmes de monotonie, $\sum_{n \geq 0} I_n$ converge.