

Exercice 1

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a; b] \rightarrow [a; b]$ une fonction.

On suppose qu'il existe $\lambda \in]0; 1[$ tel que $\forall (x; y) \in [a; b]^2, |f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$. (**)

- (a) Soit $x_0 \in [a; b]$. Rappeler la définition avec des quantificateurs de « f est continue en x_0 ».

Correction : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [a; b], (|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.

- (b) Utiliser la définition pour montrer que f est continue sur $[a; b]$.

Correction : On doit montrer que f est continue en tout point $x_0 \in [a; b]$.

Soit $x_0 \in [a; b]$. On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \frac{\varepsilon}{\lambda} > 0, \forall x \in [a; b], (|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \lambda|x - x_0| < \lambda \times \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon).$$

- (c) On suppose que la fonction f est dérivable sur $]a; b[$ et que

$$\forall x \in]a; b[, |f'(x)| \leq \lambda.$$

Montrer que l'on a alors la relation (**).

Correction : Soit $(x; y) \in [a; b]^2$.

• Si $x = y$, on a $|f(x) - f(y)| = 0 = \lambda|x - y|$. La relation (**) est vérifiée.

• On suppose $x \neq y$. Sans perte de généralité, on considère seulement le cas $x < y$. On a l'inclusion $[x; y] \subset [a; b]$ donc f est continue sur $[x; y]$ et dérivable sur $]x; y[$. D'après le théorème des accroissements finis, $\exists c \in]x; y[, f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$. Comme $|f'(c)| \leq \lambda$, on obtient

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \times |x - y| \leq \lambda|x - y|.$$

- (d) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[a; b]$.

Correction : Tout d'abord, on montre que l'équation admet au moins une solution dans $[a; b]$. Ensuite on montre l'unicité de cette solution par l'absurde.

• On pose $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est définie et continue sur $[a; b]$. Par hypothèse, $\forall x \in [a; b], a \leq f(x) \leq b$. En particulier, on a $a \leq f(a)$ et $f(b) \leq b$ ce qui se traduit par $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$. On distingue les trois cas suivants :

(i) si $g(a) = 0$ alors $x = a$ est solution de l'équation $f(x) = x$;

(ii) si $g(b) = 0$ alors $x = b$ est solution de l'équation $f(x) = x$;

(iii) si $g(a) < 0 < g(b)$, alors d'après le T.V.I. $\exists c \in]a; b[, g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$.

• Soient deux nombres réels $(x_1, x_2) \in [a; b]^2$ tels que $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$. Ceci entraîne $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2|$. On suppose $x_1 \neq x_2$.

Par hypothèse sur f on a $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| \leq \lambda|x_1 - x_2| \Rightarrow 1 \leq \lambda$. Ceci contredit l'hypothèse sur λ donc $x_1 = x_2$.

2. Soit f une fonction vérifiant les hypothèses de la question précédente et ℓ son point fixe.

On considère la suite récurrente (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in [a; b]. \end{cases}$

- (a) Montrer que tous les termes de la suite sont bien définis.

Correction : Il faut vérifier, par récurrence sur n , que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [a; b]$.

- Initialisation : pour $n = 0$, on a bien $u_0 \in [a; b]$. Il n'y a rien à démontrer.

- Hypothèse de récurrence : $u_n \in [a; b]$.

- Hérédité : On doit montrer que $u_{n+1} \in [a; b]$.

On a $u_{n+1} = f(u_n)$. L'hypothèse de récurrence et l'inclusion $f([a; b]) \subset [a; b]$ entraînent $u_{n+1} \in [a; b]$.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [a; b]$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leq \lambda |u_n - \ell|$.

Correction : Précisons que $f(\ell) = \ell$. On utilise (**).

On a $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq \lambda |u_n - \ell|$.

(c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \lambda^n |u_0 - \ell|$.

Correction : On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $|u_0 - \ell| = \lambda^0 |u_0 - \ell|$. L'égalité entraîne l'inégalité.

- Hypothèse de récurrence : $|u_n - \ell| \leq \lambda^n |u_0 - \ell|$.

- Hérédité : On doit montrer que $|u_{n+1} - \ell| \leq \lambda^{n+1} |u_0 - \ell|$.

D'après la question précédente on a

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \lambda |u_n - \ell|.$$

Maintenant on utilise l'hypothèse de récurrence pour obtenir

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \lambda \times \lambda^n |u_0 - \ell| = \lambda^{n+1} |u_0 - \ell|.$$

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \lambda^n |u_0 - \ell|$.

(d) En déduire si la suite (u_n) converge et, si oui, donner sa limite.

Correction : La suite (u_n) converge vers ℓ . En effet, puisque $0 < \lambda < 1$ on a $\lambda^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et le terme $|u_0 - \ell|$ est constant. D'après les théorèmes de comparaison des suites, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \ell = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

3. Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = \cos(x) + \frac{x}{2}$.

(a) Montrer que $f([0; 2]) \subset [0; 2]$.

Correction : On étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 2]$.

On a $f'(x) = -\sin(x) + \frac{1}{2}$ et $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \sin(x) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [\frac{\pi}{6}; 2]$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	2
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}$	$\cos(2) + 1$

- On a $\frac{\pi}{12} \leq 1$ et $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq 1$ donc

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) \leq 2.$$

- On a $\cos(2) \geq -1$ donc $f(2) \geq 0$.

D'après les variations de la fonction f , on a $f([0; 2]) \subset [0; 2]$.

(b) Déterminer le maximum global de $|f'|$ sur l'intervalle $]0; 2[$.

Correction : On a $f'(x) = -\sin(x) + \frac{1}{2}$. Pour $x \in]0; 2[$, on a $-1 \leq -\sin(x) < 0$ et $-\frac{1}{2} \leq f'(x) < \frac{1}{2} \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

- Soit on observe que $|f'(\frac{\pi}{2})| = \frac{1}{2}$ avec $\frac{\pi}{2} \in]0; 2[$,
- soit on résoud l'équation $f''(x) = -\cos(x) = 0$ dans $]0; 2[$ pour trouver un unique extremum local en $x = \frac{\pi}{2}$ sans oublier de vérifier que $|f'(\frac{\pi}{2})| = \frac{1}{2}$.

Dans tous les cas on montre que le maximum global de $|f'|$ est $\frac{1}{2}$.

- (c) Soit (u_n) la suite récurrente définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in [0; 2] \end{cases}$.

Montrer que la suite (u_n) converge.

Correction : La fonction f satisfait l'hypothèse **1. b)** avec $\lambda = \frac{1}{2}$ sur l'intervalle ouvert $]0; 2[$. D'après les questions **1.** et **2.** on en déduit que la suite (u_n) converge vers l'unique point fixe de la fonction f dans l'intervalle fermé borné $[0; 2]$.

Exercice 2

Dans cet exercice, les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

- (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, (f'(x))^2 = 1 + (f(x))^2$.

Correction : Tout d'abord on calcule $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Ensuite on calcule $(f'(x))^2$ et $1 + (f(x))^2$.

$$(f'(x))^2 = \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2 = \frac{1}{4} (e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4},$$

$$1 + (f(x))^2 = 1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}.$$

D'où l'égalité!

- (b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Correction : On utilise les résultats connus $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$.

On écrit

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(e^x - \frac{1}{e^x} \right).$$

D'après les opérations sur les limites, on trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$.

On en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = (+\infty - 0) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (0 - (+\infty)) = -\infty$

- (c) En déduire que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Correction : On a bien entendu $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}$. Montrons l'inclusion inverse $\mathbb{R} \subset \text{Im}(f)$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. On utilise la définition, avec des quantificateurs, des limites généralisées pour écrire

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \exists A < 0, f(A) < y$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists B > 0, f(B) > y.$$

On a $A < B$ et la fonction f est continue sur $[A; B]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in]A; B[$, $y = f(x)$. En d'autres termes, on a $y \in \text{Im}(f)$.

- (d) Montrer que f admet une fonction réciproque définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Correction : Tout d'abord on remarque que $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f est continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0$. Par conséquent, f admet une fonction réciproque définie et dérivable sur $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

- (e) Calculer $f^{-1}(0)$.

Correction : Écrire $y = f^{-1}(0) \Leftrightarrow f(y) = 0$.

Soit on résoud l'équation $f(y) = 0$ pour trouver $y = 0$, soit on remarque tout de suite que $f(0) = 0$.

On a donc $f^{-1}(0) = 0$.

- (f) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Correction : On utilise la formule $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

En utilisant **1. a)** et le fait que $f'(x) > 0$, on montre que $f'(x) = \sqrt{1+(f(x))^2}$. On obtient

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(f \circ f^{-1}(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle fermé $[0; +\infty[$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]0; +\infty[$. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$.

- (a) On définit la fonction g sur $[0; 1]$ par

$$g(t) = \begin{cases} f(-\ln(t)) & \text{si } t \in]0; 1], \\ f(0) & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction g est continue sur $[0; 1]$, dérivable sur $]0; 1[$.

Correction : La fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a $\ln([0; 1]) =]-\infty; 0]$. La fonction $h : t \mapsto -\ln(t)$ est donc continue sur $]0; 1]$, dérivable sur $]0; 1[$ et on a $h([0; 1]) = [0; +\infty[$. Par composition de fonctions continues et dérivables, on en déduit que $g = f \circ h$ est continue sur $]0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$.

Il reste à montrer que g est continue en 0. Pour cela on doit vérifier que $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = g(0)$.

On a $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Par composition de limites, on en déduit que $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} f(h(t)) = f(0) = g(0)$.

- (b) Calculer $g(1)$ et $g'(t)$.

Correction : On a $g(1) = f(-\ln(1)) = f(0)$ et $g'(t) = h'(t) \times f'(h(t)) = -\frac{1}{t} f'(-\ln(t))$.

- (c) Montrer qu'il existe $d \in]0; 1[$ tel que $g'(d) = 0$.

Correction : La fonction g est continue sur $[0; 1]$, dérivable sur $]0; 1[$ et $g(1) = g(0)$. D'après le théorème de Rolle, $\exists d \in]0; 1[$, $g'(d) = 0$.

- (d) En déduire qu'il existe $c \in]0; +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Correction : On a

$$g'(d) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{d} f'(-\ln(d)) \Leftrightarrow f'(-\ln(d)) = 0$$

et

$$d \in]0; 1[\Leftrightarrow c = -\ln(d) \in]0; +\infty[.$$

On en déduit qu' $\exists c = -\ln(d) \in]0; +\infty[, f'(c) = 0$.

Exercice 3

1. (a) Montrer que la fonction f définie sur $] -1; 1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue en 0.

Correction : On montre que les limites de la fonction f à droite et à gauche de 0 sont égales à $f(0) = 0$.

- Pour $x > 0$, on a $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$. On utilise le résultat connu $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(x) = -\infty$. D'après

les opérations sur les limites on a $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \left(\frac{1}{-\infty} \right) = 0$.

- Pour $x < 0$, on a $f(x) = \frac{1}{\ln(-x)}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0-} -x = 0^+$. Par composition de limite, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$.

- (b) Montrer, à l'aide des suites, que la fonction g définie sur $] -1; 1[\setminus \{0\}$ par $g(x) = \frac{1}{x \ln|x|}$ n'admet pas de limite en 0.

Correction : Prenons la suite (x_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ par $x_n = \frac{1}{n}$.

On a $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\forall n \geq 2, x_n \in] -1; 1[\setminus \{0\}$. On calcule $g(x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n} \ln \frac{1}{n}} = -\frac{n}{\ln(n)}$. D'après le théorème des croissances comparées des fonctions usuelles à l'infini, on a $g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$. En d'autres termes, la suite $(g(x_n))$ diverge. On en déduit que la fonction g n'admet pas de limite en 0.

(Un autre choix possible est la suite $x_n = e^{-n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient $g(x_n) = -\frac{e^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$) .

- (c) En déduire que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Correction : On étudie l'existence d'une limite finie du taux de variation (T.V.) de f en 0.

Pour $x \in] -1; 1[\setminus \{0\}$ on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x \ln|x|} .$$

D'après la question 1. b), le T.V. de f en 0 n'admet pas de limite finie quand x tend vers 0 donc f n'est pas dérivable en 0.

2. Soit h la fonction définie par

$$h : \begin{array}{ccc}] -1; 1[\setminus \{0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin(x)}{\ln|x|} . \end{array}$$

- (a) Montrer que h est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\tilde{h}$ qu'on précisera.

Correction : On remarque que $\forall x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$, $h(x) = \sin(x)f(x)$. La fonction h est donc le produit d'une fonction bornée (sinus) et d'une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers 0. Par conséquent $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$.

(On peut aussi utiliser la continuité de $\sin$ et f).

On en déduit que la fonction h est prolongeable par continuité en 0 en la fonction $\tilde{h}$ définie sur $] - 1 ; 1[$ par

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]-1; 1[\setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (b) Montrer que la fonction $\tilde{h}$ est dérivable en 0, puis préciser la valeur de $\tilde{h}'(0)$.

Correction : On étudie l'existence d'une limite finie du T.V. de $\tilde{h}$ en 0.

Pour $x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$ on a

$$\frac{\tilde{h}(x) - \tilde{h}(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x)}{x \ln |x|} = \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{\ln |x|}.$$

D'après le cours, on sait que $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et d'après la question 1. a) on sait que

$\frac{1}{\ln |x|} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. D'après les opérations sur les limites finies on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tilde{h}(x) - \tilde{h}(0)}{x - 0} =$

0. La fonction $\tilde{h}$ est dérivable en 0 et $\tilde{h}'(0) = 0$.

- (c) Justifier que $\tilde{h}$ est dérivable sur $] - 1 ; 1[$ puis calculer $\tilde{h}'(x)$.

Correction : Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto |x|$ sont dérivables sur $] - 1 ; 1[\setminus \{0\}$. La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; 1[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle. D'après les opérations sur les fonctions dérivées, on en déduit que $\tilde{h}$ est dérivable sur $] - 1 ; 1[\setminus \{0\}$. On vient de montrer que $\tilde{h}$ est également dérivable en 0 donc $\tilde{h}$ est dérivable sur $] - 1 ; 1[$ et on a

$$\forall x \in]-1; 1[\setminus \{0\}, \tilde{h}'(x) = \frac{\cos(x)}{\ln |x|} - \frac{\sin(x)}{x(\ln |x|)^2}.$$

- (d) La fonction $\tilde{h}'$ est-elle continue en 0? Justifier votre réponse.

Correction : La réponse est oui. On doit montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{h}'(x) = \tilde{h}'(0)$. On écrit

$$\tilde{h}'(x) = \cos(x) \times f(x) - \frac{\sin(x)}{x} \times (f(x))^2.$$

On utilise les limites suivantes : $\cos(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ pour en déduire que $\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{h}'(x) = 0 = \tilde{h}'(0)$ et $\tilde{h}'$ est continue en 0.

- (e) Est-ce que $\tilde{h}''(0)$ existe? Justifier votre réponse.

Correction : La réponse est non. On montre que le T.V. de $\tilde{h}'$ en 0 n'admet pas de limite finie. Pour $x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$ on a

$$\frac{\tilde{h}'(x) - \tilde{h}'(0)}{x - 0} = \frac{\tilde{h}'(x)}{x} = \cos(x) \times \frac{1}{x \ln |x|} - \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{x(\ln |x|)^2}.$$

Choisissons la même suite qu'à la question **1.c)** pour montrer que la suite $\tilde{h}'(x_n)$ diverge. On sait que $\cos(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $\frac{\sin x_n}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ d'après la caractérisation par les suites de la continuité et de l'existence d'une limite. Le théorème des croissances comparées nous permet de conclure :

$\frac{1}{\frac{1}{n}(\ln|\frac{1}{n}|)^2} = \frac{n}{(\ln(n))^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ (Ou bien $\frac{1}{e^{-n}(\ln|e^{-n}|)^2} = \frac{e^n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$) et donc $\frac{\tilde{h}'(x_n)}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (1 \times (-\infty) - 1 \times (+\infty)) = -\infty$. La suite $\left(\frac{\tilde{h}'(x_n)}{x_n}\right)$ diverge.