

Exercice 1

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \text{ et } w_n = v_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

Correction :

- $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$ donc (v_n) est croissante.
- $w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - v_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$
 $= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2} \leq 0$ donc (w_n) est décroissante.
- $w_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n - v_n = 0$.

Les suites (v_n) et (w_n) sont donc bien adjacentes.

2. Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n-1}{2n}.$$

- (a) Donner, en utilisant les quantificateurs, la définition de « la suite converge (u_n) vers ℓ ».

Correction : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$.

- (b) En utilisant cette définition, montrer que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.

Correction : Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell = \frac{1}{2}$.

On remarque tout d'abord que $u_n = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$, d'où

$$\left| u_n - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{-1}{2n} \right| = \frac{1}{2n}, \text{ or } \frac{1}{2n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon},$$

donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, N > \frac{1}{2\varepsilon}, (\text{d'après Archimède}) \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow \left| u_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$

- (c) On définit $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

- i. Montrer que A admet une borne inférieure et une borne supérieure (on ne demande pas de les déterminer).

Correction :

- $u_1 \in A$ donc $A \neq \emptyset$.
 - La suite (u_n) converge donc elle est bornée, et donc minorée et majorée.
- D'après l'axiome de la borne inférieure (supérieure), toute partie non vide et minorée (majorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure (supérieure), et donc A admet une borne inférieure (supérieure).

- ii. Donner, en utilisant les quantificateurs, la définition de « A admet un plus grand élément ».

Correction : $\exists M \in A, \forall u_n \in A, u_n \leq M$

iii. Donner la caractérisation de la borne supérieure.

Correction : s est borne supérieure de $A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall u_n \in A, u_n \leq s, \\ \forall t \in \mathbb{R}, t < s, \exists u_n \in A, t < u_n \end{cases}$

iv. A admet-elle un plus grand élément ? un plus petit élément ? Si oui, le donner.

Dans tous les cas, démontrer la réponse.

Correction : $u_1 = 0, u_2 = \frac{1}{4}, u_3 = \frac{1}{3}, u_4 = \frac{3}{8}, \text{ etc.}$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} \text{ donc } -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2n} \leq 0$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}.$$

- 0 est minorant de A et $0 \in A$ donc 0 est le plus petit élément de A .
- $\frac{1}{2}$ est majorant de A mais $\frac{1}{2} \notin A$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{2n} \neq 0$).

Montrons alors que A n'admet pas de plus grand élément, c'est-à-dire

$$\forall u_n \in A, \exists u_m \in A, u_n < u_m :$$

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2n} > \frac{1}{2(n+1)}$, d'où

$$\forall u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \in A, \exists u_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} \in A, u_n < u_{n+1}$$

v. Montrer, en utilisant la caractérisation, que la limite ℓ de la suite est borne supérieure de A .

Correction :

- $\forall u_n \in A, u_n \leq \frac{1}{2}$

- $\forall t \in \mathbb{R}, t < \frac{1}{2},$

$$u_n > t \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} > t \Leftrightarrow \frac{1}{2} - t > \frac{1}{2n} \Leftrightarrow \frac{1-2t}{2} > \frac{1}{2n} \Leftrightarrow n > \frac{1}{1-2t}$$

$$\text{d'où } \forall t \in \mathbb{R}, t < \frac{1}{2}, \exists n > \frac{1}{1-2t} \text{ (d'après Archimède) donc } \exists u_n \in A, u_n > t.$$

Exercice 2

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. (a) Démontrer, sans utiliser les tables de vérité, que

$$(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow ((\text{non}P) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((\text{non}Q) \Rightarrow P).$$

Correction :

$$\begin{aligned}(P \text{ ou } Q) &\Leftrightarrow (\text{non}(\text{non}P) \text{ ou } Q) \\ &\Leftrightarrow (\text{non}P \Rightarrow Q) \\ &\Leftrightarrow (P \text{ ou non}(\text{non}Q)) \\ &\Leftrightarrow (\text{non}Q \Rightarrow P)\end{aligned}$$

- (b) Montrer que $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$, $(n + p)$ est impair ou $n^2 - p^2$ est un multiple de 4.

Correction : D'après la question précédente, il est équivalent de montrer :

$(n + p)$ est pair $\Rightarrow n^2 - p^2$ est un multiple de 4.

Soit $(n + p)$ pair, alors $n + p = 2k$

$$\begin{aligned}n^2 - p^2 &= (n + p)(n - p) \\ &= (n + p)(n + p - 2p) \\ &= (2k)(2k - 2p) \\ &= 4k(k - p)\end{aligned}$$

donc $n^2 - p^2$ est bien un multiple de 4.

2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, la propriété suivante est vraie

$$P(n) : \forall x \in \mathbb{R}^+, (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Correction :

- $n = 0$: $(1 + x)^0 = 1$ et $1 + 0.x = 1$ donc on a bien $(1 + x)^0 \geq 1 + 0.x$.
- Hypothèse de récurrence : $(1 + x)^n \geq 1 + nx$
- rang $n + 1$: $(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x)$ car $(1 + x) > 0$
d'où $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x + nx^2$
 $nx^2 \geq 0$ donc $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$.

3. (a) Soit E et F des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Donner, en utilisant les quantificateurs, la définition de

- i. $\ll f$ est surjective de E dans $F \gg$.

Correction : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$

- ii. $\ll f$ est injective de E dans $F \gg$.

On donnera dans ce cas deux propositions équivalentes.

Correction : $\forall x \in E, \forall x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

ou, de façon équivalente,

$\forall x \in E, \forall x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

- (b) Soit l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

- i. Montrer que si $x \leq 0$ et $x' > 0$, $f(x) = f(x')$ est absurde.

$$\text{Correction : } f(x) = f(x') \Leftrightarrow \frac{x}{1 + |x|} = \frac{x'}{1 + |x'|} \Leftrightarrow \frac{x}{1 - x} = \frac{x'}{1 + x'}$$

$$\Leftrightarrow x(1 + x') = x'(1 - x) \Leftrightarrow x(1 + 2x') = x' \Leftrightarrow x = \frac{x'}{1 + 2x'}$$

Or $x \leq 0$ et $\frac{x'}{1 + 2x'} > 0$, ce qui est impossible.

ii. Montrer que f est injective.

(Indication : faire une étude de cas selon le signe de x)

Correction :

- Si $x > 0$ et $x' > 0$, $f(x) = f(x') \Leftrightarrow \frac{x}{1+|x|} = \frac{x'}{1+|x'|} \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} = \frac{x'}{1+x'}$
 $\Leftrightarrow x(1+x') = x'(1+x) \Leftrightarrow x = x'$

- Si $x > 0$ et $x' \leq 0$, on se retrouve dans le cas de la question précédente (x et x' ayant des rôles symétriques) et on a donc $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

- Si $x \leq 0$ et $x' \leq 0$, $f(x) = f(x') \Leftrightarrow \frac{x}{1+|x|} = \frac{x'}{1+|x'|} \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{x'}{1-x'}$
 $\Leftrightarrow x(1-x') = x'(1-x) \Leftrightarrow x = x'$

- Si $x \leq 0$ et $x' > 0$, on se retrouve encore dans le cas de la question précédente. On a donc montré que, dans tous les cas, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ ou $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$, f est donc bien injective.

iii. Montrer que $Im f \subset]-1, 1[$.

Correction : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + |x| > |x| \geq 0$

d'où $0 \leq \frac{|x|}{1+|x|} < 1$ et donc $-1 < \frac{x}{1+|x|} < 1$

On a donc, $\forall x \in \mathbb{R}, -1 < f(x) < 1$.

iv. En déduire que f n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (on utilisera la négation de 3(a)i).

Correction : Si $y = 2$, $2 = \frac{x}{1+|x|} \Leftrightarrow 2 + 2|x| = x$.

Si $x \geq 0$, $2 + 2|x| = x \Leftrightarrow 2 + 2x = x \Leftrightarrow x = -2$: impossible !

Si $x < 0$, $2 + 2|x| = x \Leftrightarrow 2 - 2x = x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$: impossible !

Donc, $\exists y = 2, \forall x \in \mathbb{R}, y \neq f(x)$.

v. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $] -1, 1[$ et en déduire son application réciproque f^{-1} .

Correction : On sait déjà que f est injective et que $Im f \subset] -1, 1[$.

Il nous reste donc à montrer que $] -1, 1[\subset Im f$, i.e. $\forall y \in] -1, 1[, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x}{1+|x|}.$$

$$\text{Si } x \geq 0, y = \frac{x}{1+x} \text{ et } y \in [0, 1[\Leftrightarrow y(1+x) = x \text{ et } y \in [0, 1[$$

$$\Leftrightarrow x(1-y) = y \text{ et } y \in [0, 1[\Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y} \text{ et } y \in [0, 1[\Rightarrow x = \frac{y}{1-|y|}$$

$$\text{Si } x < 0, y = \frac{x}{1-x} \text{ et } y \in] -1, 0] \Leftrightarrow y(1-x) = x \text{ et } y \in] -1, 0]$$

$$\Leftrightarrow x(1+y) = y \text{ et } y \in] -1, 0] \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y} \text{ et } y \in] -1, 0] \Rightarrow x = \frac{y}{1-|y|}$$

On a donc bien f surjective de $\mathbb{R}$ dans $] -1, 1[$.

De plus, $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ d'où $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$.