(**Changer de copie**)

Exercice I (10 points)—

Les parties I, II sont indépendantes

I– 1. Rappeler le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto \text{sh}(x)$. La fonction $sh(x)$ est elle un infiniment petit au voisinage de 0 ? Si oui préciser l'ordre et sa partie principale.

La fonction $x \mapsto sh(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout $\mathbb{R}$, en particulier, elle est trois fois dérivable en 0 et son développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 se décline comme suit:

$$sh(x) = sh(0) + \frac{sh'(0)}{1!}x + \frac{sh''(0)}{2!}x^2 + \frac{sh^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} sh(x) = 0$ ce qui prouve que $sh(x)$ est un infiniment petit au voisinage de 0 d'ordre un dont sa partie principale est x.

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction

$$f(x) = \ln(1 + \text{sh}(x))$$

On rappelle que le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$. D'autre part, d'après la question précédente, la fonction $x \mapsto sh(x)$ est un infiniment petit; il en découle par composition des développements limités l'expression suivante:

$$\ln(1 + X) = X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 + o(X^3)$$

où $X = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, $X^2 = \Big(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\Big)^2 = x^2 + o(x^3)$ et $\frac{1}{3}X^3 = \frac{1}{3}\Big(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\Big)^3 = x^3 + o(x^3)$ Il vient que le DL de f au voisinage de 0 est le suivant :

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

3. En utilisant la division selon les puissances croissantes, déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction

$$g(x) = \frac{\ln(1 + \text{sh}(x))}{\sin(x)}$$

Le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction sinus étant

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

Donc au voisinage de 0, $g(x)$ *s'écrit comme suit :*

$$g(x)=\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}=\frac{x\big(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\big)}{x\big(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)\big)}=\frac{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)}$$

La partie régulière du DL de la fonction $g(x)$ *en* 0 *à l'ordre* 3 *constitue le quotient (de degré* ≤ 3*) de la division suivant les puissances croissantes du polynôme* $1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2$ *par* $1-\frac{1}{6}x^2$ *comme suit*

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
1 & -\frac{1}{2}x & +\frac{1}{2}x^2 & & & & 1 \quad -\frac{1}{6}x^2 \\
\cline{7-7}
-1 & & +\frac{1}{6}x^2 & & & & 1 \quad -\frac{1}{2}x \quad +\frac{2}{3}x^2 \quad -\frac{1}{12}x^3 \\
\cline{1-3}
 & -\frac{1}{2}x & +\frac{2}{3}x^2 & & & & \\
 & \frac{1}{2}x & & -\frac{1}{12}x^3 & & & \\
\cline{2-4}
 & & \frac{2}{3}x^2 & -\frac{1}{12}x^3 & & & \\
 & & -\frac{2}{3}x^2 & & \frac{1}{9}x^4 & & \\
\cline{3-5}
 & & & -\frac{1}{12}x^3 & +\frac{1}{9}x^4 & & \\
 & & & \frac{1}{12}x^3 & & -\frac{1}{72}x^5 & \\
\cline{4-6}
 & & & & \frac{1}{9}x^4 & -\frac{1}{72}x^5 &
\end{array}$$

D'où

$$1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2=(1-\frac{1}{6}x^2)(1-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{12}x^3)+\frac{1}{9}x^4-\frac{1}{72}x^5$$

On conclut que

$$g(x)=1-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{12}x^3+o(x^3)$$

4. Montrer que g est prolongeable par continuité en $x=0$, on notera $\tilde{g}$ ce prolongement.

   D'après ce qui prcède on a

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\Big(1-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{12}x^3+o(x^3)\Big)=1$$

   donc g *est prolongeable par continuité en* $x=0$ *et on a son prolongement* $\tilde{g}$ *qui est définie par :*

$$\tilde{g}(x)=\begin{cases} g(x) & si \quad x\neq 0 \\ 1 & si \quad x=0 \end{cases}$$

5. Montrer que $\tilde{g}$ est dérivable en $x=0$, on donnera $\tilde{g}'(0)$. En déduire la position de la courbe de $\tilde{g}$ par rapport à la tangente T au voisinage de 0.

   On a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tilde{g}(x)-\tilde{g}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\Big(-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{12}x^3+o(x^3)\Big)}{x}=\lim_{x\to 0}\Big(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x-\frac{1}{12}x^2+o(x^2)\Big)=-\frac{1}{2}$$

   Donc $\tilde{g}$ *est dérivable en* $x=0$, *sa dérivée vaut* $\tilde{g}'(0)=-\frac{1}{2}$.
   L'équation de la tangente T *à la courbe de* $\tilde{g}$ *est donnée par*

$$T: y=1-\frac{1}{2}x$$

   Sa position, au voisinage de 0, *par rapport à la courbe de* $\tilde{g}$ *s'en déduit du signe de* $D=\tilde{g}(x)-(1-\frac{1}{2}x)=+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)$. *Ainsi* $D\geq 0$, *ce qui veut dire que la courbe de* $\tilde{g}$ *est au dessus de la tangente* T *au voisinage de* 0.

II– 1. Soit $x \geq 0$, écrire la formule de Taylor-Lagrange de la fonction $\sin(x)$ en 0 avec un reste d'ordre 5.

La fonction sinus étant, au moins cinq fois dérivable pour tout $x \geq 0$, vérifie les hypothèses de Taylor-Lagrange et on a pour $x \geq 0$, $\exists\, \theta \in]0,1[$, tel que

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5\cos(\theta x)$$

2. Déduire que pour tout $x \in]0,1[$ on a

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin(x)}{x} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}$$

Pour $x \in]0,1[$; $\exists \theta \in]0,1[$ vérifiant la formule de Taylor précédente, on en déduit que $\theta x \in]0,1[\subset] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que $0 < \cos(\theta x) < 1$.
Donc $\forall x \in]0,1[$ on peut écrire que

$$\begin{aligned}
\Big(0 < \cos(\theta x) < 1\Big) \quad &\Longleftrightarrow \quad \Big(0 < \frac{1}{120}x^5\cos(\theta x) < \frac{1}{120}x^5\Big) \\
&\Longleftrightarrow \quad \Big(x - \frac{1}{6}x^3 < \sin(x) < x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5\Big) \\
&\Longleftrightarrow \quad \Big(1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin(x)}{x} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\Big)
\end{aligned}$$

3. Pour $x \in [0,1]$, justifier que la fonction $\dfrac{\sin(x)}{x}$ est intégrable.

Sur l'intervalle $]0,1]$ la fonction $\dfrac{\sin(x)}{x}$ est continue en tant que quotient de fonctions continues, de plus

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

La fonction $\dfrac{\sin(x)}{x}$ est donc prolongeable par continuité sur tout l'intervalle $[0,1]$, ce qui prouve qu'elle est intégrable sur cet intervalle.

4. En déduire de la question 2) que $\dfrac{17}{18}$ est une valeur approchée de

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, dx$$

à 2×10^{-3} près.

De la double inégalité précédente qui est vraie sur l'intervalle $]0,1[$, on peut conclure que la fonction $\dfrac{\sin(x)}{x}$ est minorée et majorée par deux fonctions polynômes (continues et intégrables sur $[0,1]$). Leurs intégrales suivent la même relation d'ordre, d'après la propriété des fonctions intégrables, et on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big(1 - \frac{x^2}{6}\Big)\, dx && < \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, dx && < \int_0^1 \Big(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\Big)\, dx \\
(\Longrightarrow) \quad & \Big[x - \frac{x^3}{18}\Big]_0^1 && < \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, dx && < \Big[x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600}\Big]_0^1 \\
(\Longrightarrow) \quad & \frac{17}{18} && < \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, dx && < \frac{17}{18} + \frac{1}{600} \\
(\Longrightarrow) \quad & 0 && < \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\, dx - \frac{17}{18} && < \frac{1}{600} < \frac{1}{500} = 2 \times 10^{-3}
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{17}{18}$ *est une valeur approchée de* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ *à* 2×10^{-3} *près.*

(**Changer de copie**)

Exercice II (6 points)—

On définit la fonction réelle f par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + e^{1/x^2} - 1}$$

On note $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$, respectivement, l'ensemble de définition et la courbe de f.

1. Prouver que $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$.

   On vérifie aisément que, pour tout $x \neq 0$, *la fonction* e^{1/x^2} *est minorée par* $e^0 = 1$, *il s'ensuit que* $e^{1/x^2} - 1 > 0$ *et que* $x^2 + e^{1/x^2} - 1$ *est toujours positif comme somme de deux réels positifs. La fonction* $f(x) = \sqrt{x^2 + e^{1/x^2} - 1}$ *est alors bien définie pour tout* $x \neq 0$, *d'où* $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$.

2. Vérifier que pour tout $x > 0$ on a :

$$f(x) = x\sqrt{1 + \frac{e^{1/x^2} - 1}{x^2}}$$

   Pour tout $x > 0$ *on peut écrire que*

$$f(x) = \sqrt{x^2 + e^{1/x^2} - 1} = \sqrt{x^2\Big(1 + \frac{e^{1/x^2} - 1}{x^2}\Big)} = |x|\sqrt{1 + \frac{e^{1/x^2} - 1}{x^2}} = x\sqrt{1 + \frac{e^{1/x^2} - 1}{x^2}}$$

3. En utilisant le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$, prouver que f admet un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = x + \frac{1}{2x^3} + o(\frac{1}{x^3})$$

   Pour tout $x > 0$ *si on pose* $t = \dfrac{1}{x} > 0$ *on peut écrire, d'après la question précédente, que*

$$f(t) = \frac{1}{t}\sqrt{1 + \big(e^{t^2} - 1\big)t^2}$$

   Rappelons, d'abord le DL au voisinage de 0 *à l'ordre* 1 *de* $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t)$.
   D'autre part quand x *tend vers* $+\infty$, t *tend vers* 0, *or au voisinage de* 0 *on a* $e^t = 1+t+o(t)$ *et comme* t^2 *demeure au voisinage de* 0 *on obtient par composition de DLs*

$$e^{t^2} = 1 + t^2 + o(t^2)$$

   ou encore $e^{t^2} - 1 = t^2 + o(t^2)$. *On déduit que, lorsque* t *tend vers* 0, $(e^{t^2} - 1)t^2$ *est équivalente à* t^4 *et tend aussi vers* 0. *Par composoition des Dls on obtient, finalement, le DL de* $\sqrt{1 + \big(e^{t^2} - 1\big)t^2}$ *à l'ordre* 4 *au voisinage de* 0 *comme suit*

$$\sqrt{1 + \big(e^{t^2} - 1\big)t^2} = 1 + \frac{1}{2}t^4 + o(t^4)$$

Donc la fonction $f(t)$ s'écrit au voisinage de 0 comme suit

$$f(t) = \frac{1}{t}(1 + \frac{1}{2}t^4 + o(t^4)) = \frac{1}{t} + \frac{1}{2}t^3 + o(t^3)$$

En remplaçant la variable $t = \frac{1}{x}$ on obtient le développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ suivant:

$$f(x) = x + \frac{1}{2x^3} + o(\frac{1}{x^3})$$

4. Déterminer le développement asymptotique au voisinage de $-\infty$.

La même méthodologie est suivie pour déterminer le développement asymptotique au voisinage de $-\infty$ de la fonction f à la différence que $x < 0$ donc on réécrit f comme suit

$$f(x) = |x|\sqrt{1 + \frac{e^{1/x^2} - 1}{x^2}} = -x\sqrt{1 + \frac{e^{1/x^2} - 1}{x^2}}$$

Ensuite, en passant par le changement de variable $t = \frac{1}{x}$ alors t reste aussi au voisinage de 0 quand x tend vers $-\infty$ et nous pouvons utiliser le DL retrouvé précédemment, à savoir que

$$\sqrt{1 + \left(e^{t^2} - 1\right)t^2} = 1 + \frac{1}{2}t^4 + o(t^4)$$

d'où

$$f(t) = -\frac{1}{t}(1 + \frac{1}{2}t^4 + o(t^4)) = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2}t^3 + o(t^3)$$

En remplaçant la variable $t = \frac{1}{x}$ on obtient le développement asymptotique au voisinage de $-\infty$ suivant:

$$f(x) = -x - \frac{1}{2x^3} + o(\frac{1}{x^3})$$

5. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}$.

D'après les deux développements asymtotiques retrouvés dans les questions (3.) et (4.) on a

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \pm x \pm \frac{1}{2x^3} + o(\frac{1}{x^3}) = \lim_{x\to\pm\infty} \pm x = +\infty$$

de plus

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \pm 1 \pm \frac{1}{2x^4} + o(\frac{1}{x^4}) = \pm 1$$

Donc la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique A^+ au voisiange de $+\infty$ d'équation $A^+ : y = x$ et une asymptote oblique A^- au voisiange de $-\infty$ d'équation $A^- : y = -x$.

La position de $\mathcal{C}$ par rapport à A^+ se déduit du signe de $f(x) - x$ au voisinage de $+\infty$ qui vaut $f(x) - x = \dfrac{1}{2x^3} + o(\dfrac{1}{x^3})$ donc positif ce qui donne que $\mathcal{C}$ est au-dessus de A^+.

Maintenant, au voisinage de $-\infty$ la position de $\mathcal{C}$ par rapport à A^- se déduit du signe de $f(x) + x$ au voisinage de $-\infty$ qui est égale à $f(x) + x = -\dfrac{1}{2x^3} + o(\dfrac{1}{x^3})$, cette différence est aussi positive on a toujours la courbe $\mathcal{C}$ au-dessus de A^-.

(**Changer de copie**)

Exercice III (6 points)—

Soient f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ positive et décroissante sur $I = [a, b]$ (où $a < b$). Soit g une fonction continue sur I. On définit $G : I \to \mathbb{R}$ par la relation

$$G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$$

1. Montrer qu'il existe m et M dans $\mathbb{R}$ tel que

$$G([a, b]) = [m, M]$$

La fonction g, étant continue sur tout l'intervalle I, alors d'après le théorème fondamental de l'analyse la primitive de g qui s'annule en a, la fonction G, est dérivable sur I donc continue sur tout I. Par conséquent G est bornée atteint ses bornes sur I et on a le résultat:
Il existe m et M dans $\mathbb{R}$ tel que

$$m = \min_{x \in I} G(x), \quad \textit{et} \quad M = \max_{x \in I} G(x)$$

Comme l'image d'un segment de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un segment de $\mathbb{R}$ alors

$$G([a, b]) = [m, M]$$

2. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que

$$\int_a^b f(t)g(t)\, dt = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)\, dt$$

Remarquant, d'abord, que f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1(I)$ donc f et f' sont continues sur I et donc intégrables sur cet intervalle.
Maintenant, Si on pose $u'(t) = g(t)$ et $v(t) = f(t)$ on a la primitive $u(t) = G(t)$ et la dérivée $v'(t) = f'(t)$. En utilisant la formule d'intégration par parties suivante

$$\int_a^b v(t)u'(t)\, dt = [v(t)u(t)]_a^b - \int_a^b v'(t)u(t)\, dt$$

on obtient que

$$\int_a^b f(t)g(t)\, dt = [f(t)G(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)G(t)\, dt = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)\, dt$$

car $G(a) = 0$

3. Montrer que

$$m\big(f(a) - f(b)\big) \leq -\int_a^b f'(t)G(t)\, dt \leq M\big(f(a) - f(b)\big)$$

D'après la question 1.) $\forall t \in I$ ona

$$m \leq G(t) \leq M$$

Comme la fonction f est $\mathcal{C}^1$ et décroissante sur I alors $f'(t) \leq 0$ ou encore la fonction $-f'(t) \geq 0$, $\forall t \in I$. On en déduit que

$$-mf'(t) \leq -G(t)f'(t) \leq -Mf'(t)$$

En intégrant sur $I=[a,b]$ (où $a<b$), cette double inégalité reste vraie et on a

$$\begin{aligned} -m\int_a^b f'(t)\,dt \quad &\leq -\int_a^b G(t)f'(t)\,dt \quad \leq -M\int_a^b f'(t)\,dt \\ (\Longrightarrow) \quad m\big(f(a)-f(b)\big) \quad &\leq -\int_a^b G(t)f'(t)\,dt \quad \leq M\big(f(a)-f(b)\big) \end{aligned}$$

4. En déduire des questions précédentes qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt$$

D'après ce qui précède, on a d'une part

$$\int_a^b f(t)g(t) \ = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)\,dt$$

et d'autre part

$$m\big(f(a)-f(b)\big) \leq -\int_a^b f'(t)G(t)\,dt \leq M\big(f(a)-f(b)\big)$$

Donc

$$\begin{aligned} f(b)G(b)+m\big(f(a)-f(b)\big) \leq \quad & f(b)G(b)-\int_a^b f'(t)G(t)\,dt \quad \leq f(b)G(b)+M\big(f(a)-f(b)\big) \\ (\Longrightarrow) \quad mf(a)+f(b)\big(G(b)-m\big) \leq \quad & \int_a^b f(t)g(t)\,dt \quad \leq Mf(a)+f(b)\big(G(b)-M\big) \end{aligned}$$

Rappelons, que $m\leq G(b)$ et que $G(b)\leq M$, de plus la fonction f est positive sur I donc

$$0\leq f(b)\big(G(b)-m\big) \quad \textit{et} \quad f(b)\big(G(b)-M\big)\leq 0$$

Il en découle que

$$(1) \qquad mf(a) \leq \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leq Mf(a)$$

Deux cas se distinguent:
Si $f(a)\neq 0$ alors d'après (1) on a $\dfrac{1}{f(a)}\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt \in [m,M]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c\in[a,b]$ tel que

$$\frac{1}{f(a)}\int_a^b f(t)g(t)\,dt = G(c) \quad (\Longleftrightarrow) \quad \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)G(c) = f(a)\int_a^c g(t)\,dt$$

Le deuxième cas, lorsque $f(a)=0$, est immédiat.
<u>En conclusion</u>:
Si f est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ positive et décroissante sur $I=[a,b]$ (où $a<b$).
Si g une fonction continue sur I et G est sa primitive qui s'annule en a alors

$$\exists\, c\in[a,b]; \quad \int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt$$