Université de Technologie de Compiègne **MT91**

— CORRIGÉ FINAL P17—

Date : 27 Juin 2017

(**Changer de copie**)

Exercice I (4 points + **3points Bonus**)— (Les questions I. et II. sont indépendantes.)

I– Soit le polynôme $P(X) = X^5 + 3X^4 + 7X^3 + 13X^2 + 12X + 4$.

(a) Montrer que -1 est une racine réelle triple (d'ordre trois) de P.

Les polynômes dérivés de P d'ordre un, deux et trois sont respectivement: $P'(X) = 5X^4 + 12X^3 + 21X^2 + 26X + 12$, $\quad P''(X) = 20X^3 + 36X^2 + 42X + 26$ *et* $\quad P'''(X) = 60X^2 + 72X + 42$. *On a* $p(-1) = -1 + 3 - 7 + 13 - 12 + 4 = 0$, $\quad P'(-1) = 5 - 12 + 21 - 26 + 12 = 0$, $\quad P''(-1) = -20 + 36 - 42 + 26 = 0$ *alors que* $P'''(-1) = 30 \neq 0$ *donc* -1 *est bien une racine d'ordre* 3 *de* P.

(b) En déduire la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}[X]$.

D'après la question précédente, -1 *est une racine triple de* P *cela implique que* $(X + 1)^3$ *divise* P *ou encore il existe un polynôme* Q *de degré deux tel que* $P(X) = (X + 1)^3Q(X)$. *On peut trouver* $Q(X)$ *en effectuant la division euclidienne de* $P(X)$ *par* $(X + 1)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$ *ce qui donne* $Q(X) = X^2 + 4$. *Le discriminant de* $Q(X)$, $\Delta = -16 < 0$ *donc* $Q(X)$ *est un polynôme irréductible dans* $\mathbb{R}[X]$.
En conclusion la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P *dans* $\mathbb{R}[X]$ *est la suivante*

$$P(X) = (X + 1)^3(X^2 + 4).$$

(c) Quelles sont les racines complexes non-réelles de P? En donner le module et l'argument.

Il suffit de chercher les racines du polynôme $Q(X) = X^2 + 4$ *cela revient à trouver les solutions de l'équation* $z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4 = |z|^2e^{2i\arg(z)}$ *dans* $\mathbb{C}$. *Ce qui donne* $z_1 = 2i$ *et* $z_2 = \bar{z}_1 = -2i$ *dont les modules* $|z_1| = |z_2| = 2$ *et les arguments* $\arg(z_1) = \pi/2$ *et* $\arg(z_2) = 3\pi/2$

(d) Déduire la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Le polynôme $Q(X)$ *se factorise dans* $\mathbb{C}[X]$ *comme suit* $Q(X) = X^2 + 4 = (X - 2i)(X + 2i)$, *il en découle alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de* P *dans* $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = (X + 1)^3(X - 2i)(X + 2i).$$

II– (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E_c): \quad r^2 + 2r + 4 = 0.$$

On calcule le discriminant $\delta = 1 - 4 = -3 < 0 = (i\sqrt{3})^2$ *donc* (E_c) *admet deux racines complexes* $r_1 = -1 + i\sqrt{3}$ *et* $r_2 = -1 - i\sqrt{3}$

(b) Soit l'équation différentielle

$$(E): \quad y'' + 2y' + 4y = xe^x.$$

i. Résoudre l'équation homogène associée à (E)

$$(E_H): \quad y'' + 2y' + 4y = 0.$$

En notant que l'équation caractéristique associée à (E_h) *est l'équation algébrique* (E_c) *alors d'après la question précédente* (E_H) *admet comme solutions*

$$y_h(x) = e^{-x}\big(A\cos(\sqrt{3}x) + B\sin(\sqrt{3}x)\big), \quad A \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

ii. Trouver une solution particulière $y_p(x) = Q(x)e^x$; où $Q(x)$ est une fonction polynôme de degré un.
En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

Une solution particulière de (E) *est de la forme* $y_p(x) = (ax + b)e^x$, *elle vérifie donc*

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + 4y_p(x) = (7ax + 7b + 4a)e^x = xe^x.$$

Alors y_p *est solution si et seulement si* $7a = 1$ *et* $7b + 4a = 0$ *ce qui donne* $a = \frac{1}{7}$ *et* $b = -\frac{4}{49}$. *donc* $y_p(x) = \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x$
En conclusion la forme générale des solutions y *de* (E) *est la suivante*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = e^{-x}\big(A\cos(\sqrt{3}x) + B\sin(\sqrt{3}x)\big) + \frac{1}{7}(x - \frac{4}{7})e^x, \quad A \in \mathbb{R} \text{ et } B \in \mathbb{R}$$

(**Changer de copie**)

Exercice II (8 points)—

Soit la fraction rationnelle $\quad F(X) = \dfrac{X+2}{X^3(X^2+X+1)}.$

1. Donner la forme de la décomposition en éléments simples de la fraction F dans $\mathbb{R}(X)$. (On ne demande pas ici de calculer les cœfficients dans la décomposition).

Le degré de la fraction F *étant strictement négatif sa partie entière est nulle. On cherche les pôles réels de* F *ce qui revient à trouver les racines du polynôme* $P(X) = X^3(X^2 + X + 1)$. *Or* $P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $X^2 + X + 1$ *étant irréductible dans* $\mathbb{R}[X]$. *Donc* F *admet un seul pôle réel* 0 *d'ordre* 3 *(car* 0 *est racine triple de* P*).*
La forme de la décomposition en éléments simples de F *dans* $\mathbb{R}(X)$ *est alors*

$$F(X) = \frac{\lambda_1}{X} + \frac{\lambda_2}{X^2} + \frac{\lambda_3}{X^3} + \frac{aX + b}{X^2 + X + 1}$$

où $(\lambda_i)_{1 \le i \le 3}, a$ *et* b *sont des réels.*

2. Effectuer la division suivant les puissances croissantes du polynôme $X+2$ par le polynôme X^2+X+1 (on veut un reste de degré quatre).

La division suivant les puissances croissantes du polynôme $X+2$ par le polynôme X^2+X+1 est comme suit

$$
\begin{array}{rrrrr|rrr}
2 & +X & & & & 1 & +X & +X^2 \\ \cline{6-8}
-2 & -2X & -2X^2 & & & 2 & -X & -X^2 \\ \cline{1-3}
 & -X & -2X^2 & & & & & \\
 & X & +X^2 & +X^3 & & & & \\ \cline{2-4}
 & & -X^2 & +X^3 & & & & \\
 & & X^2 & +X^3 & +X^4 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & 2X^3 & +X^4 & & &
\end{array}
$$

Donc on a

$$X+2=(X^2+X+1)(2-X-X^2)+X^3(2+X).$$

3. Déduire la décomposition en éléments simples de la fraction $F(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$.

A partir du résultat de la divsion effectuée dans la question précédente on peut déduire que la décomposition en éléments simples de la fraction $F(X)$ dans $\mathbb{R}(X)$ est

$$F(X)=\frac{(X^2+X+1)(2-X-X^2)+X^3(2+X)}{X^3(X^2+X+1)}=-\frac{1}{X}-\frac{1}{X^2}+\frac{2}{X^3}+\frac{X+2}{X^2+X+1}.$$

On retrouve, par unicité de la décomposition, les valeurs de $\lambda_1=-1,\lambda_2=-1,\lambda_3=2,a=1$ et $b=2$ de la question 1.

4. On considère la fonction f définie pour tout réel x dans $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{x+2}{x^3(x^2+x+1)}$.

   (a) Déterminer les réels α et β tel que: $\dfrac{x+2}{x^2+x+1}=\alpha\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}+\dfrac{\beta}{x^2+x+1}$.

   On vérifie aisément que

$$\frac{x+2}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\times\frac{2x+4}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\times\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{3}{2}\times\frac{1}{x^2+x+1}$$

   on en déduit que $\alpha=1/2$ et $\beta=3/2$.

   (b) Déduire une primitive de la fonction fraction rationnelle $\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$.

   On a, d'après la question précédente

$$\int\frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}\,dx.$$

   La première primitive est une primitive usuelle de la forme

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{u'}{u}du=\frac{1}{2}\ln|u|+c_1=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+c_1,\quad c_1\in\mathbb{R}.$$

grace au changement de variable $u = x^2 + x + 1$ (donc $du/dx = 2x + 1$).
Pour la deuxième primitive, en la mettant sous sa forme canonique, la fonction polynôme devient

$$x^2 + x + 1 = \frac{3}{4}\Big(1 + (\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2\Big),$$

et en utilisant le changement de variable $u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ (ce qui donne $du/dx = \frac{2}{\sqrt{3}}$), on peut écrire que

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx &= \sqrt{3}\int \frac{du}{1+u^2} = \sqrt{3}\arctan(u) + c_2 \\ &= \sqrt{3}\arctan\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big) + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Calculer $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

En utilisant la décomposition de $F(X)$, la fraction rationnelle associée à f, dans la question 3., la linéarité de l'intégrale et la question précédente on en déduit que

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= -\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + 2\int \frac{dx}{x^3} + \int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx \\ &= -\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big) + c \\ &= \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \ln\Big(\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{|x|}\Big) + \sqrt{3}\arctan\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big) + c; \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(**Changer de copie**)

Exercice III (10 points)—

On se propose de résoudre l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}): \qquad 2x(1+x)y' + (1+x)y = 1$$

sur l'intervalle $J =]-1, +\infty[$.

1. *Résolution de l'équation homogène*

   (a) Soit l'équation (normalisée)

$$(E): \qquad y' + \frac{1}{2x}y = \frac{1}{2x(1+x)}$$

   Préciser dans quel(s) intervalle(s) $I \subset J$ on peut résoudre l'équation (E).

   En écrivant l'équation (normalisée) sous cette forme $y' = a(x)y + b(x)$, on vérifie que les fonctions définies par $a(x) = -\dfrac{1}{2x}$ et $b(x) = \dfrac{1}{2x(1+x)}$ sont définies et continues pour tout $x \neq 0$ et $x \neq -1$ donc on peut résoudre (E) pour tout $x \in J_{\setminus\{0\}}$ ou encore sur l'intervalle $I =]-1, 0[$ ou sur $I =]0, +\infty[$.

(b) On note (E_h) l'équation homogène associée à (E), montrer que sa solution est de la forme

$$y_h(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{|x|}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

D'après le cours, la solution de l'équation homogène (E_h) est donnée par

$$\begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y_h(x) = \lambda e^{-\int \frac{1}{2x}\, dx} = \lambda e^{\ln(\frac{1}{\sqrt{|x|}})} = \dfrac{\lambda}{\sqrt{|x|}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{array}$$

L'intervalle $I =]-1, 0[$ ou $I =]0, +\infty[$ et la constante réelle λ dépend de I.

2. *Recherche d'une solution particulière*

(a) Dans cette question on suppose que $x > 0$, calculer la primitive suivante

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2x(1+x)}\, dx.$$

(On pourra utiliser le changement de variable $u = \sqrt{x}$).

Pour tout $x > 0$, on pose $(u = \sqrt{x}) \Leftrightarrow (u^2 = x)$ et $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. La primitive

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2x(1+x)}\, dx = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(u) + c = \arctan(\sqrt{x}) + c.$$

(b) Déduire, en utilisant la méthode de variation de la constante, une solution particulière y_p de (E) définie sur $I \subset]0, +\infty[$.

Nous allons appliquer la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière y_p de (E) définie sur $I =]0, +\infty[$. Cela revient à chercher

$$y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{\sqrt{|x|}} = \frac{\lambda(x)}{\sqrt{x}}, \quad x > 0,$$

où $\lambda : I \mapsto \mathbb{R}$ est la nouvelle fonction inconnue(supposée dérivable sur I). On a ainsi, y_p vérifie (E) si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad \frac{\lambda'(x)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x(1+x)}.$$

Donc, d'après la question précédente on a (pour $c = 0$)

$$\lambda(x) = \int \frac{\sqrt{x}}{2x(1+x)}\, dx = \arctan(\sqrt{x})$$

Une solution particulière sur $I =]0, +\infty[$ est alors

$$y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

(c) Dans cette question on suppose que $x < 0$ et $x \neq -1$, calculer la primitive suivante en utilisant le changement de variable $u = \sqrt{-x}$ (et en décomposant, éventuellement, en éléments simples la fraction trouvée en fonction de u)

$$\int \frac{\sqrt{-x}}{2x(1+x)}\, dx.$$

Pour tout $x < 0$ et $x \neq -1$, en effectuant le changement de variable suivant $(u = \sqrt{-x}) \Leftrightarrow (u^2 = -x)$ et $\frac{du}{dx} = \frac{-1}{2\sqrt{-x}}$, on obtient la primitive

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{-x}}{2x(1+x)}\, dx &= \int \frac{du}{1-u^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{-du}{1-u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + c \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right| + c.\end{aligned}$$

(d) Déduire, une solution particulière y_p de (E) définie sur $I \subset]-\infty, 0[$.

On cherche

$$y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{\sqrt{|x|}} = \frac{\lambda(x)}{\sqrt{-x}}, \quad x \in I =]-1, 0[,$$

où $\lambda : I \mapsto \mathbb{R}$ est la fonction inconnue(supposée aussi dérivable sur I). La fonction y_p vérifie (E) est équivalent à

$$\forall x \in I, \quad \frac{\lambda'(x)}{\sqrt{-x}} = \frac{1}{2x(1+x)}.$$

Donc, d'après la question précédente on a (pour $c = 0$)

$$\lambda(x) = \int \frac{\sqrt{-x}}{2x(1+x)}\, dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right| = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right)$$

Une solution particulière sur $I =]-1, 0[$ est donc

$$y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{\sqrt{-x}} = \frac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right).$$

(e) Donner la forme de la solution générale y de l'équation (E) dans chaque intervalle I.

En conclusion la forme de la solution générale de (E) est la somme de la solution y_h de l'équation homogène (E_h) et de la solution particulière y_p de (E) :

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & x > 0 \\[2ex] \dfrac{\lambda_2}{\sqrt{-x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right) & -1 < x < 0 \end{cases}$$

où λ_1 et λ_2 sont deux constantes réelles.

3. *Etude du raccord en 0*

(a) On note la fonction f définie sur $J =]-1, +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right) & -1 < x < 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0[1].

Pour $x > 0$ on a $\arctan(x) = x + o(x)$ au voisinage de 0 donc $\arctan(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ car $\sqrt{x}$ demeure au voisinage de 0 quand $x \to 0^+$, donc

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} + o(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1.$$

On a $\ln(1+x) = x + o(x)$ au voisinage de 0 donc pour $x < 0$, $\ln(1+\sqrt{-x}) = \sqrt{-x} + o(\sqrt{-x})$ et $\ln(1-\sqrt{-x}) = -\sqrt{-x} + o(\sqrt{-x})$ (car $\pm\sqrt{-x}$ demeure au voisinage de 0 quand $x \to 0^-$). Il s'ensuit la limite

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2\sqrt{-x} + o(\sqrt{-x})}{2\sqrt{-x}} = 1.$$

En conclusion $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$, donc f est bien continue en 0.
Pour étudier la dérivabilité de f en 0 on cherche la limite des deux taux de variations : pour $x > 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = -\frac{1}{3} + o(1) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{3},$$

en utilisant le DL au voisinage de 0 suivant

$$\arctan(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x\sqrt{x} + o(x\sqrt{x}).$$

Tandis que pour $x < 0$ on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{2x\sqrt{-x}}\left(ln\left(\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right) - 2\sqrt{-x}\right) = -\frac{1}{3} + o(1) \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} -\frac{1}{3}$$

en utilisant le DL au voisinage de 0 suivant

$$\ln(1 \pm \sqrt{-x}) = \pm\sqrt{-x} + \frac{x}{2} + \mp\frac{1}{3}x\sqrt{-x} + o(x\sqrt{-x}).$$

On en déduit que f est dérivable et que $f'(0) = -\frac{1}{3}$.

(b) Déduire que la fonction f est la seule solution de $(\mathcal{E})$ sur tout l'intervalle J.

D'après la question précédente f est continue dérivable sur tout l'intervalle J, sa restriction à $\in J_{\setminus\{0\}}$ est bien une solution de l'équation normalisée (E) (d'après la question 2.e) avec $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). Par ailleurs la relation $(\mathcal{E}) : 2x(1+x)f'(x) + (1+x)f(x) = 1$ est satisfaite pour $x = 0$ puisque $f(0) = 1$.

[1] On rappelle que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ et que $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ au voisinage de 0.

Réciproquement si on veut prolonger (ou raccorder) les solutions y trouvées dans la question 2.e) en zéro on procède ainsi:
L'application $x \mapsto \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ *admet une limite finie en* 0^+ *si et seulement si* $\lambda_1 = 0$.
L'application $x \mapsto \dfrac{\lambda_2}{\sqrt{-x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right)$ *admet une limite finie en* 0^- *si et seulement si* $\lambda_2 = 0$.
Donc il y a un raccord par continuité en 0 *si et seulement si* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ *et le prolongement est définie en* 0 *par* $y(0) = 1$. *On retrouve alors la fonction* f *qui en plus dérivable et satisfait* $(\mathcal{E})$.