MT90 - Printemps 2015 - Final
Durée : 2 heures
Barème indicatif : 8 -12
Aucun document - Calculatrices et téléphones portables interdits
La rédaction est très importante, rédigez et justifiez clairement vos réponses
RENDEZ UNE COPIE PAR EXERCICE (même si elle est blanche).

EXERCICE 1 *CHANGEZ DE COPIE*

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \exp(1/x) & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.
   Rappel sur les croissances comparées des fonctions exponentielle et puissance : pour tout a, b réels positifs,
   $$\lim_{t \to -\infty} \exp(at) t^b = 0$$
   (a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0. On note $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de f en 0.
   (b) Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (c) Que signifie la proposition "$\tilde{f}$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$" ? La fonction $\tilde{f}$ est-elle continûment dérivable sur $\mathbb{R}$?
2. Pour tout réel x, on rappelle que la partie entière de x, notée $E(x)$, est le plus grand entier, inférieur ou égal à x. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la relation
   $$x - 1 < E(x) \leq x$$
   Pour un x fixé dans $\mathbb{R}$, on définit la suite (u_n) pour tout $n \geq 1$ par
   $$u_n = \frac{E(x) + E(2x) + E(3x) + \dots E(nx)}{n^2} = \frac{\sum_{i=1}^n E(ix)}{n^2}$$
   (a) Montrer par récurrence que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
   (b) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si elle est convergente, donner sa limite.
3. Soit g une fonction numérique définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. On suppose que g admet une limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers l'infini.
   (a) En utilisant la définition de la convergence de g vers l quand x tend vers $+\infty$, montrer que l'ensemble $\{g(x),\, x \in \mathbb{R}^+\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$, autrement dit, montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) (QUESTION HORS-BARÈME 1 POINT) L'ensemble $\{g(x),\, x \in \mathbb{R}^+\}$ admet-il un plus grand élément ? Si la réponse est négative, donner un contre-exemple.

EXERCICE 2. *CHANGEZ DE COPIE*

L'exercice comporte deux parties : la première partie concerne des résultats généraux que l'on pourra admettre pour traiter la seconde partie.

1. **Généralités.**
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert Ω de $\mathbb{R}$ et soit (u_n) une suite récurrente définie par $\begin{cases} u_0 \in \Omega & \text{donné} \\ u_{n+1} = f(u_n), & n \geq 0 \end{cases}$
   (a) Donner à l'aide des quantificateurs la définition de f est continue en $x_0 \in \Omega$.
   (b) Après avoir rappelé la caractérisation de f dérivable en $x_0 \in \Omega$, montrer que si f est dérivable en $x_0 \in \Omega$, alors f est continue en $x_0 \in \Omega$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ à la condition que
   $$Imf = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in \Omega, y = f(x)\} \subset \Omega.$$
   (d) Si $Imf \subset \Omega$ et si f est strictement croissante sur Ω, montrer que la suite (u_n) est monotone.
   Indication : faire un raisonnement par récurrence et traiter les différents cas possibles, à savoir :
      i. $u_0 < f(u_0)$,
      ii. $u_0 = f(u_0)$,
      iii. $u_0 > f(u_0)$.
2. **Application.**
Soit f l'application définie et continue sur $]1/2, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{bx}$, avec $1 < b < \sqrt{2}$.
   (a) Montrer que f est dérivable sur $]1/2, +\infty[$ et donner sa fonction dérivée.
   (b) Soit la fonction $g(x) = f(x) - x$ définie pour tout $x \in]1/2, +\infty[$. Calculer $g(1)$ et $g(\sqrt{2} \times 200)$. Appliquer alors le Théorème des Valeurs Intermédiaires à la fonction g pour montrer l'existence d'un point fixe de f dans $]1/2, +\infty[$. Notons ce point fixe $l \in]1/2, +\infty[$ et rappelons qu'il vérifie $f(l) = l$.
   (c) Montrer que b est un point fixe de f et que c'est l'unique point fixe de f dans $]1/2, +\infty[$.
   (d) La suite récurrente (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 > b & \text{donné} \\ u_{n+1} = f(u_n), n \geq 0 \end{cases}$, est-elle bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$?
   (e) Dans cette dernière question, nous allons montrer de deux manières distinctes que (u_n) est une suite convergente et en déduire sa limite.
      i. Utiliser le Théorème des Accroissements Finis, pour montrer que f vérifie la condition de Lipschitz sur $]1/2, +\infty[$. En déduire la convergence de (u_n) et donner sa limite.
      Rappel : f vérifie la condition de Lipschitz sur $]1/2, +\infty[$ si
      $$\exists K \in \mathbb{R}^+,\ \forall x \in]1/2, +\infty[,\ \forall y \in]1/2, +\infty[,\ |f(y) - f(x)| \leq K|y - x|$$
      ii. Etudier la monotonie de la suite (u_n). En déduire la convergente de la suite (u_n) ainsi que sa limite.