Final MT90 - A2016 - Corrigé

Exercice 1

1. On considère la fonction h définie et dérivable sur $]0\,,\,\pi[$ par $h(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

   (a) Montrer que $\forall x \in]0\,,\,\pi[,\ h'(x) = -1 - (h(x))^2$.

   Correction : Soit $x \in]0\,,\,\pi[$. On a

$$h'(x) = \frac{(-\sin x)(\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -1 - (h(x))^2$$

   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to \pi^-} h(x)$.

   Correction : On a

$$\lim_{x\to 0^+} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^+} \cos x}{\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to \pi^-} = \frac{\lim\limits_{x\to \pi^-} \cos x}{\lim\limits_{x\to \pi^-} \sin x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

   (c) Quelle est la nature de $\mathrm{Im}(h)$? Justifier votre réponse.

   Correction : La fonction est continue sur $]0\,,\,\pi[$ et l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle donc $\mathrm{Im}(h)$ est un intervalle.

   (d) Déduire des questions **(b)** et **(c)** que $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}$.

   Correction : D'après les questions **(b)** et **(c)**, Im(h) est un intervalle non majoré et non minoré donc $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}$.

   (e) Montrer que h admet une fonction réciproque définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (on ne demande pas de calculer h^{-1}).

   Correction : Tout d'abord on remarque que $h'(x) < 0$ sur $]0\,,\,\pi[$. La fonction h est continue, dérivable et strictement décroissante sur $]0\,,\,\pi[$ avec $\forall x \in]0\,,\,\pi[\,, h'(x) \neq 0$. Par conséquent, h admet une fonction réciproque définie et dérivable sur $\mathrm{Im}(h) = \mathbb{R}$.

   (f) Calculer $h^{-1}(\sqrt{3})$.

   Correction : Écrire $x = h^{-1}(\sqrt{3}) \Leftrightarrow h(x) = \sqrt{3}$.
   On doit résoudre l'équation $\frac{\cos x}{\sin x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{3}\sin x$. On sait que h est bijective donc l'équation admet une unique solution. De plus on sait que $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}$. La solution recherchée est donc $x = \frac{\pi}{6}$.
   On a donc $h^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$.

   (g) Donner l'expression de la fonction dérivée de h^{-1} et calculer $\left(h^{-1}\right)'(\sqrt{3})$.

   Correction : D'après le cours, on sait que

$$\forall y \in \mathbb{R},\ (h^{-1})'(y) = \frac{1}{h'(h^{-1}(y))} = \frac{1}{-1 - (h(h^{-1}(y))^2} = -\frac{1}{1 + y^2}.$$

   On en déduit que $(h^{-1})'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{4}$.

2. Soit f une fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell\,.$$

(a) On définit la fonction g sur $[0\,,\pi]$ par $g(t)=\begin{cases} f\circ h(t) & \text{si } t\in]0\,,\pi[\,,\\ \ell & \text{si } t=0 \text{ ou } t=\pi\ .\end{cases}$

Montrer que la fonction g est continue sur $[0\,,\pi]$ et dérivable sur $]0\,,\pi[$.

Correction : La fonction h est continue et dérivable sur $]0\,,\pi[$ et on a $h\big(]0\,,\pi[\big)=\mathbb{R}$. De plus f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition de fonctions continues et dérivables, on en déduit que $g=f\circ h$ est continue et dérivable sur $]0\,;\pi[$. Il reste à vérifier la continuité à droite de 0 et à gauche de π. On a , d'après **1.b.**

$$\lim_{t\to 0^+} g(t)=\lim_{t\to 0^+} f(h(t))=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell=g(0),$$

et

$$\lim_{t\to \pi^-} g(t)=\lim_{t\to \pi^-} f(h(t))=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell=g(\pi).$$

On conclut que g est continue sur $[0\,,\pi]$.

(b) Calculer $g'(t)$.

Correction : On rappelle juste la formule de dérivation de deux fonctions composées

$$g'(t)=f'(h(t))\times h'(t)\ .$$

(c) Montrer, à l'aide d'un théorème du cours à préciser, qu'il existe $d\in]0\,,\,\pi[$ tel que $g'(d)=0$.

Correction : La fonction g est continue sur $[0\,,\pi]$, dérivable sur $]0\,,\pi[$ et $g(0)=g(\pi)$. D'après le théorème de Rolle, $\exists\, d\in]0\,,\pi[\ ,\ g'(d)=0$.

(d) En déduire qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $f'(c)=0$.

Correction : On a

$$g'(d)=0\Leftrightarrow f'(h(d))\times h'(d)=0\Leftrightarrow f'(h(d))=0$$

et

$$d\in]0\,;\,\pi[\Leftrightarrow c=h(d)\in\mathbb{R}\ .$$

On en déduit qu' $\exists c=h(d)\in\mathbb{R}\ ,f'(c)=0$.

Exercice 2

1. (a) Montrer que $\forall\, x\in\mathbb{R}\,,|\sin x|\leq|x|$.

Correction : Il y a plusieurs démonstrations possibles dont une faite en cours. Dans cette correction nous proposons d'appliquer le théorème des accroissements finis.

• Tout d'abord on note que $\sin 0=0\Rightarrow|\sin 0|\leq|0|$.

• Pour $x>0$, la fonction sin étant continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, d'après l'égalité des accroissements finis, on sait qu'il existe $c\in]0,x[$ tel que

$$\sin x-\sin 0=(\sin' c)(x-0)\Leftrightarrow\sin x=x\cos c\Rightarrow|\sin x|\leq|x| \text{ car } |\cos c|\leq 1.$$

• Pour $x<0$, on peut utiliser le fait que sin est impaire et $-x>0$ ainsi on se ramène au cas précédent :

$$|\sin x|=|\sin(-x)| \text{ et } |x|=|-x|\Rightarrow|\sin x|\leq|x|.$$

<u>Conclusion :</u> $\forall x\in\mathbb{R},\ |\sin x|\leq|x|$.

(b) On pose $g(x)=x\cos x-\sin x$. Montrer que $\forall\, x\in\mathbb{R}\,,|g(x)|\leq|x|^3$.

(Indication : Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction g entre 0 et x)

Correction : Même raisonnement.
• Tout d'abord on note que $g(0) = 0 = 0^3 \Rightarrow |g(0)| \leq |0|^3$.
• Pour $x > 0$, la fonction g étant continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, d'après l'égalité des accroissements finis, on sait qu'il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$g(x) - g(0) = g'(c)(x - 0) \Leftrightarrow g(x) = xg'(c).$$

Or

$$g'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x \ .$$

Donc

$$g'(c) = -c \sin c \text{ et } 0 < c < x \Rightarrow |g'(c)| = |c \sin c| = |c||\sin c| \leq |c|^2 \leq |x|^2 \text{d'après } \mathbf{1.a.}$$

On en déduit que $|g(x)| = |x||g'(c)| \leq |x|^3$.
• Pour $x < 0$, on peut utiliser le fait que g est impaire et $-x > 0$ ainsi on se ramène au cas précédent :

$$|g(x)| = |g(-x)| \text{ et } |x| = |-x| \Rightarrow |g(x)| \leq |x|^3.$$

<u>Conclusion :</u> $\forall x \in \mathbb{R},\ |g(x)| \leq |x|^3$.

2. (a) Pour $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, on pose $h(x) = \dfrac{\sin x - x}{x^2}$. Montrer que $h(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x} - \dfrac{g(x)}{x^2}$.
Correction : On a

$$\frac{\cos x - 1}{x} - \frac{g(x)}{x^2} = \frac{\cos x - 1}{x} - \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{x(\cos x - 1) - (x \cos x - \sin x)}{x^2} = \frac{-x + \sin x}{x^2} = h(x).$$

(b) La fonction h admet-elle une limite quand $x \to 0$? Si oui, préciser la valeur de la limite.
Correction : On peut utiliser les résultats du cours à savoir

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} x \times \frac{1 - \cos x}{x^2} = 0 \times \frac{1}{2} = 0 \ .$$

D'après **1.b**, Pour $x \neq 0$, on a $|g(x)| \leq |x|^3 \Rightarrow \left| \dfrac{g(x)}{x^2} \right| = \dfrac{|g(x)|}{|x|^2} \leq |x|$. D'après le théorème des gendarmes (ou l'un de ses corollaires), on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x^2} = 0$.
<u>Conclusion :</u> La fonction h admet une limite en 0 et $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.
(a) Justifier que f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction $\tilde{f}$ qu'on précisera.
Correction : La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ et f admet une limite en 0, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, donc f est prolongeable par continuité en 0 en la fonction $\tilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}$ et définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(b) Justifier que la fonction $\tilde{f}$ est dérivable en 0, puis préciser la valeur de $\tilde{f}'(0)$.

On étudie l'existence de la limite du taux d'accroissement de $\tilde{f}$ en 0 :

$$\frac{\tilde{f}(x)-\tilde{f}(0)}{x-0} = \frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x} = \frac{\sin x - x}{x^2} = h(x) \underset{x\to 0}{\to} 0 \text{ d'après } \textbf{2.b.}$$

<u>Conclusion :</u> La limite du taux d'accroissement existe, donc $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et $\tilde{f}'(0) = 0$.

(c) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ puis montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

La fonction f est un quotient de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ (et le dénominateur ne s'annule pas) donc f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

(d) La fonction $\tilde{f}'$ est-elle continue en 0 ? Justifer votre réponse.

On doit vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} \tilde{f}'(x) = \tilde{f}'(0) = 0$.

On a déjà démontré à la question **2.b.** que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \tilde{f}'(x) = 0$ et on conclut que $\tilde{f}'$ est continue en 0.

Exercice 3 (8 points) **- CHANGER DE COPIE**

1. Soit $g : [0\,,+\infty[\to [0\,,+\infty[$ une fonction continue telle que $g(0) = 0$.
Soient a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a\,,b] \to [a\,,b]$ une fonction telle que

$$\forall (x\,,y) \in [a\,,b]^2\ , |f(x) - f(y)| \leq g(|x-y|)\,.$$

(a) Montrer que f est continue en tout point $x_0 \in [a\,,b]$.
(Indication : utiliser la continuité de g en 0).

Correction : Soit $x_0 \in [a\,,b]$. On doit montrer que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

On a

$$|f(x) - f(x_0)| \leq g(|x-x_0|)$$

Par hypothèse sur g et par composition de limites on a

$$\lim_{x\to x_0} |x-x_0| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(|x-x_0|) = g(0) = 0.$$

Par conséquent, d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)-f(x_0)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

(b) Montrer, à l'aide d'un théorème du cours à préciser, que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[a\,,b]$.

Correction : On pose $h(x) = f(x) - x$. La fonction h est définie et continue sur $[a\,;b]$. Par hypothèse, $\forall x \in [a\,;b]\ , a \leq f(x) \leq b$. En particulier, on a $a \leq f(a)$ et $f(b) \leq b$ ce qui se traduit par $h(a) \geq 0$ et $h(b) \leq 0$. On distingue les trois cas suivants :
(i) si $h(a) = 0$ alors $x = a$ est solution de l'équation $f(x) = x$;
(ii) si $h(b) = 0$ alors $x = b$ est solution de l'équation $f(x) = x$;
(iii) si $h(a) < 0 < h(b)$, alors d'après le T.V.I. $\exists c \in]a\,;b[\,, h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = c$.

2. On suppose qu'il existe $K > 0$, tel que $\forall t \geq 0\,,\; g'(t) \leq K$.
   (a) Montrer, à l'aide d'un théorème du cours à préciser, que $\forall t \geq 0\,,\; g(t) \leq Kt$.
   Correction : • Si $t = 0$, on a $g(t) = 0$. L'inégalité est vérifiée.
   • On suppose $t \neq 0$. On a l'inclusion $[0\,;t] \subset [0\,,+\infty[$ donc g est continue sur $[0\,;t]$ et dérivable sur $]0\,;t[$. D'après le théorème des accroissements finis,
   $$\exists c \in]0\,;t[\;, g(t) - g(0) = (t-0)g'(c)\;.$$
   Comme $g'(c) \leq K$, on obtient $g(t) \leq Kt$.
   (b) Donner une condition suffisante sur K pour que l'équation $f(x) = x$ admette une unique solution dans $[a\,,b]$, puis démontrer-le en raisonnant par l'absurde.
   Correction : Une condition suffisante sur K est l'encadrement $0 < K < 1$.
   En effet, soient deux nombres réels $(x_1\,,x_2) \in [a\,,b]^2$ tels que $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$. Ceci entraîne $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2|$. On suppose $x_1 \neq x_2$.
   Par hypothèse sur f on a $|f(x_1)-f(x_2)| = |x_1-x_2| \leq K|x_1-x_2| \Rightarrow 1 \leq K$ (en divisant par $|x_1 - x_2| \neq 0$). Ceci contredit l'hypothèse sur K donc $x_1 = x_2$.

   Dans la suite de l'exercice, on considère que cette condition sur K est vérifiée et f satisfait la condition de Lipschitz de rapport K suivante :
   $$\forall (x\,;y) \in [a\,,b]^2\;, |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|\,.$$
   (c) On note ℓ l'unique point fixe de f.
      i. Montrer que ℓ est aussi un point fixe de $f \circ f$, et qu'il est unique en tant que point fixe de $f \circ f$.
      Correction : • Tout d'abord on remarque que $f(\ell) = \ell \Rightarrow f\circ f(\ell) = f(f(\ell)) = f(\ell) = \ell$ donc ℓ est un point fixe de $f \circ f$.
      • De plus, étant donné $(x, y) \in [a\,,b]$, on a
      $$|f\circ f(x) - f\circ f(y)| = |f(f(x)) - f(f(y)) \leq K|f(x) - f(y)| \leq K^2|x-y|\;.$$
      Donc $f\circ f$ est Lipschitzienne de rapport $0 < K^2 < 1$. D'après le raisonnement effectué à la question **2.b.**, le point fixe de $f \circ f$ est unique.
      ii. Nous avons alors les deux propositions suivantes :
      $$(H1) \qquad \forall x \in [a\,,\ell[\,,\; f\circ f(x) - x > 0 \text{ et } \forall x \in]\ell\,,b]\,,\; f\circ f(x) - x < 0$$
      $$(H2) \qquad \forall x \in [a\,,\ell[\,,\; f\circ f(x) - x < 0 \text{ et } \forall x \in]\ell\,,b]\,,\; f\circ f(x) - x > 0$$
      Parmi les propositions $(H1)$ et $(H2)$, laquelle est fausse ? Justifier votre réponse.
      Correction : La proposition $H2$ est fausse car elle contredit le fait que $\mathrm{Im} f\circ f \subset [a\,,b]$ qui entraîne :
      $$f\circ f(a) \geq a \text{ et } f\circ f(b) \leq b\,.$$

3. On considère la suite récurrente (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \in [a\,,b]\,. \end{cases}$
   On admet que tous les termes de la suite sont bien définis.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\;,\; |u_{n+1} - \ell| \leq K|u_n - \ell|$.
   Correction : Précisons que $f(\ell) = \ell$. On utilise le fait que f est K-Lipschitzienne.
   On a $\forall n \in \mathbb{N}\,, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq K|u_n - \ell|\,.$
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\;,\; |u_n - \ell| \leq K^n|u_0 - \ell|$.

Correction : On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

• Initialisation : pour $n = 0$, on a $|u_0 - \ell| = K^0 |u_0 - \ell|$. L'égalité entraîne l'inégalité.

• Hypothèse de récurrence : $|u_n - \ell| \leq K^n |u_0 - \ell|$.

• Hérédité : On doit montrer que $|u_{n+1} - \ell| \leq K^{n+1} |u_0 - \ell|$.

D'après la question précédente on a

$$|u_{n+1} - \ell| \leq K |u_n - \ell| .$$

Maintenant on utilise l'hypothèse de récurrence pour obtenir

$$|u_{n+1} - \ell| \leq K \times K^n |u_0 - \ell| = K^{n+1} |u_0 - \ell| .$$

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq K^n |u_0 - \ell|$.

(c) En déduire que la suite (u_n) converge et préciser la limite.

Correction : La suite (u_n) converge vers ℓ. En effet, puisque $0 < K < 1$ on a $K^n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ et le terme $|u_0 - \ell|$ est constant. D'après les théorèmes de comparaison des suites, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n - \ell = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell .$$

(d) On suppose que f est strictement décroissante et $a \leq u_0 < \ell$. On définit les suites (v_n) et (w_n), pour $n \in \mathbb{N}$, telles que $v_0 = u_0$, $w_0 = u_1$, $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ et $w_{n+1} = f \circ f(w_n)$.

i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq v_n < \ell$ et $\ell < w_n \leq b$.

Correction : On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

• Initialisation : pour $n = 0$, on a par hypothèse $a < v_0 = u_0 < \ell$. De plus, $w_0 = u_1 = f(u_0)$ et f est strictement décroissante donc $u_0 < \ell \Rightarrow w_0 = f(u_0) > \ell$. Comme $\mathrm{Im} f \subset [a\, , b]$ on obtient $w_0 = f(u_0) \leq b$.

• Hypothèse de récurrence : $a \leq v_n < \ell$ et $\ell < w_n \leq b$.

• Hérédité : On doit montrer que $a \leq v_{n+1} < \ell$ et $\ell < w_{n+1} \leq b$

On précise que

$$f \text{ strictement décroissante } \Rightarrow f \circ f \text{ strictement croissante.}$$

On obtient immédiatement

$$\begin{aligned} a \leq v_n < \ell &\Rightarrow f \circ f(a) \leq f \circ f(v_n) < f \circ f(\ell) = \ell \\ &\Rightarrow a \leq v_{n+1} < \ell \text{ car } a \leq f \circ f(a) \text{ et } v_{n+1} = f \circ f(v_n) , \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \ell < w_n \leq b &\Rightarrow \ell = f \circ f(\ell) < f \circ f(w_n) \leq f \circ f(b) = \ell \\ &\Rightarrow \ell < w_{n+1} \leq b \text{ car } f \circ f(b) \leq b \text{ et } w_{n+1} = f \circ f(w_n) . \end{aligned}$$

• Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leq v_n < \ell$ et $\ell < w_n \leq b$.

ii. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

Correction : On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

• Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_{2n} = u_0$ et par hypothèse $v_0 = u_0$. De plus, $u_{2n+1} = u_1$ et par hypothèse $w_0 = u_1$. Les deux égalités sont vérifiées

• Hypothèse de récurrence : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

• Hérédité : On doit montrer que $v_{n+1} = u_{2n+2}$ et $w_{n+1} = u_{2n+3}$

On obtient immédiatement

$$v_{n+1} = f \circ f(v_n) = f \circ f(u_{2n}) = f(u_{2n+1}) = u_{2n+2} ,$$

et

$$w_{n+1} = f \circ f(w_n) = f \circ f(u_{2n+1}) = f(u_{2n+2}) = u_{2n+3} .$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

iii. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

Correction : • On utilise la proposition $(H1)$ pour montrer que (v_n) est croissante et (w_n) est décroissante.
• D'après **i.**, on a $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ v_n \leq w_n$.
• D'après **2.c.**, $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \ell \Rightarrow v_n = u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$ et $w_n = u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} \ell$.
Conclusion :Les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.