Médian MT90 - A2014 - Corrigé

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on considère f une application de E dans F et g une application de F dans G, où E, F et G sont des parties de $\mathbb{R}$.

1. Soit P et Q deux propositions logiques. On considère l'implication $P \Rightarrow Q$.
   Donner la contraposée et démontrer, sans utiliser de table de vérité, son équivalence avec l'implication.
   Correction : La contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est (non $Q \Rightarrow$ non P). En effet,

$$\begin{aligned} P \Rightarrow Q &\Leftrightarrow \text{non } P \text{ ou } Q \\ &\Leftrightarrow \text{non } P \text{ ou non (non } Q) \\ &\Leftrightarrow \text{non (non } Q) \text{ ou non } P \\ &\Leftrightarrow \text{non } Q \Rightarrow \text{non } P \end{aligned}$$

2. Donner, en utilisant les quantificateurs, la définition de
   (a) « f est surjective de E dans F ».
   Correction : $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$

   (b) « f est injective de E dans F ».
   Correction : $\forall x \in E, \forall x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
   ou de façon équivalente
   $\forall x \in E, \forall x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq (x')$

   (c) « f n'est pas injective de E dans F ».
   Correction : $\exists x \in E, \exists x' \in E, f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$

3. (a) Utiliser les questions 1 et 2 pour montrer que

$$g \circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective.}$$

   Correction : On va montrer le résultat par contraposée : on suppose que f est non injective et on va montrer qu'alors $f \circ g$ est non injective.
   $\exists x \in E, \exists x' \in E, f(x) = f(x')$ et $x \neq x' (*)$
   or $f(x) = f(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x'))$
   d'où $(*) \Rightarrow \exists x \in E, \exists x' \in E, g \circ f(x) = g \circ f(x')$ et $x \neq x'$

   (b) A quelle condition l'application $f \circ f$ est-elle bien définie ?
   Correction : f étant définie sur E, on doit avoir $F \subset E$, ce qui impose que $Imf \subset E$.

   (c) A-t-on f injective $\Rightarrow f \circ f$ injective ?
   Si oui, le démontrer, sinon, donner un contre-exemple.
   Correction : Oui, en effet

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \forall x' \in E, \quad (f \circ f)(x) = (f \circ f)(x') &\Leftrightarrow (f(f(x)) = f(f(x')) \\ &\Rightarrow f(x) = f(x') \text{ car } f \text{ est injective} \\ &\Rightarrow x = x' \text{ car } f \text{ est injective} \end{aligned}$$

4. On dit que f est strictement croissante si

$$\forall x \in E, \forall x' \in E, \, x < x' \Rightarrow f(x) < f(x').$$

   (a) Montrer que si f est strictement croissante alors f est injective.
   Correction : $\forall x \in E$, $\forall x' \in E$, a-t-on $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$?
   Si $x \neq x'$, alors $x < x'$ ou $x > x'$.
   Si $x < x'$, alors $f(x) < f(x')$ car f est strictement croissante.
   De même, si $x > x'$, alors $f(x) > f(x')$ car f est strictement croissante.
   Dans les 2 cas, on a bien $f(x) \neq f(x')$.

   (b) Montrer que si f est strictement croissante alors $f \circ f$ est strictement croissante.
   Correction :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \forall x' \in E, \quad x < x' &\Rightarrow f(x) < f(x') \text{ car } f \text{ est strictement croissante} \\ &\Rightarrow f(f(x)) < f(f(x')) \text{ car } f \text{ est strictement croissante} \\ &\Rightarrow (f \circ f)(x) < (f \circ f)(x') \end{aligned}$$

   (c) Que peut-on en déduire alors sur $f \circ f$? Comparer avec la question 3c.
   Correction : Si $(f \circ f)$ est strictement croissante, alors $(f \circ f)$ est injective (d'après la question 4a). C'est cohérent avec la question 3c qui montrait que si f est injective alors $f \circ f$ est injective.

   (d) Montrer que $Im(f \circ f) \subset Imf$.
   Correction :

$$\begin{aligned} z \in Im(f \circ f) &\Leftrightarrow \exists x \in E, \, z = (f \circ f)(x) \\ &\Leftrightarrow \exists x \in E, \, z = f(f(x)) \\ &\Rightarrow \exists y = f(x) \in F, \, z = f(y) \\ &\Rightarrow z \in Imf \end{aligned}$$

5. Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{-2\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x+2}.$$

   (a) Déterminer Imf.
   Correction : $\frac{1}{x+2}$ ne s'annulant jamais, il est clair que $Imf \subset \mathbb{R}\backslash\{1\}$
   Montrons l'inclusion inverse :
   $\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, y = f(x) \Leftrightarrow y = 1 - \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{1-y} - 2$.
   On vient donc de montrer que $\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \exists x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ tel que $y = f(x)$.

   (b) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ dans Imf.
   Correction : Par définition de l'image, f est surjective de $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ dans Imf.
   Montrons alors l'injectivité : $\forall x \in E, \, \forall x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow \frac{1}{x+2} = \frac{1}{x'+2} \Rightarrow x = x'$.

   (c) En déduire l'existence d'une application réciproque f^{-1} et la déterminer.
   Correction : L'application f étant bijective de $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ dans $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, elle admet une application réciproque f^{-1} de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ dans $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ et, si $y = f(x)$, alors $x = f^{-1}(y)$.
   D'après la question 5a, on a donc $f^{-1}(y) = \frac{1}{1-y} - 2$.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}*,\ u_n = \frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

1. Donner, en utilisant les quantificateurs, la définition de « la suite converge vers l ».
   Correction : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$
2. En utilisant cette définition, montrer que la suite (u_n) converge vers une limite l que l'on déterminera.
   Correction : Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l = 0.$
   $|u_n| = |\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)| \leq \frac{1}{n}$, or $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$,
   d'où $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ N > \frac{1}{\varepsilon}$, (d'après Archimède) $\forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$
3. Utiliser un autre résultat du cours pour montrer que la suite converge vers l.
   Correction : Par exemple, soit $v_n = \frac{1}{n}$ et $w_n = \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et que w_n est bornée, donc la suite $u_n = v_n w_n$ vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
4. On définit $A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$.
   (a) Donner, en utilisant les quantificateurs, la définition de
      i. « A admet un plus petit élément ».
         Correction : $\exists m \in A,\ \forall x \in A,\ m \leq x.$
      ii. « A n'admet pas de plus petit élément ».
         Correction : $\forall m \in A,\ \exists x \in A,\ m > x.$
   (b) Montrer que A n'admet pas de plus petit élément.
      Correction : $\forall m \in A,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = \frac{1}{n_0}\sin\left(\frac{\pi}{n_0+1}\right)$.
      Il reste à trouver $u_n \in A$ tel que $m > x$.
      Soit $n > n_0$, alors $0 < \frac{\pi}{n+1} < \frac{\pi}{n_0+1} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) < \sin\left(\frac{\pi}{n_0+1}\right)$ car sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
      D'où $\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) < \frac{1}{n_0}\sin\left(\frac{\pi}{n_0+1}\right)$ c'est-à-dire $\exists u_n \in A,\ u_n < m$.
   (c) Qu'en est-il d'un plus grand élément ? (justifier la réponse).
      Correction : $u_1 = 1$, montrons que c'est le plus grand élément.
      $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \frac{\pi}{n+1} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \leq \sin(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow 0 < \frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \leq \frac{1}{1}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
      c'est-à-dire $u_n \leq 1$.
   (d) Montrer que A admet une borne inférieure.
      Correction : La suite u_n converge donc elle est bornée, et donc minorée.
      $u_1 \in A$ donc A est non vide.
      D'après l'axiome de la borne inférieure, toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure, et donc A admet une borne inférieure.
   (e) Donner la caractérisation de la borne inférieure.
      Correction : a est borne inférieure de $A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall u_n \in A,\ u_n \geq a, \\ \forall t > a, \exists u_n \in A,\ t > u_n \end{cases}$
   (f) Montrer que la limite l de la suite est borne inférieure de A.
      (indication : on pourra utiliser le fait que $sin(x) \leq x$ sur $[0, \pi/2]$).

Correction : On a montré dans la question 4c que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$, donc on a bien $\forall u_n \in A$, $u_n \geq 0$.
$\forall t > 0$, montrons qu'il existe $u_n \in A$ tel que $t > u_n$:
$t > u_n \Leftrightarrow t > \frac{1}{n} \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$
Comme $\frac{\pi}{n+1} \geq \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$, alors trouver n tel que $t > \frac{1}{n}\frac{\pi}{n+1}$ suffit.
$t > \frac{1}{n}\frac{\pi}{n+1} \Leftrightarrow n(n+1) > \frac{\pi}{t}$. Ceci est vérifié si on prend $n > \sqrt{\frac{\pi}{t}}$ car $n(n+1) > n^2$.
D'où, $\exists n > \sqrt{\frac{\pi}{t}}$ tel que $u_n < t$.