Université de Technologie de Compiègne **MT90**

— CORRIGÉ: MÉDIAN A17 —

Rendez une copie par exercice (même si elle est blanche)

(*Changer de copie*)

Exercice I (7 points)— Les deux parties I et II sont indépendantes.

I- Soient les quatre propositions suivantes :

(a) $\exists p \in \mathbb{Z}; \quad \exists n \in \mathbb{N}; \quad p \leq -n^2$; (b) $\forall p \in \mathbb{Z}; \quad \exists n \in \mathbb{N}; \quad p \leq -n^2$;

(c) $\exists p \in \mathbb{Z}; \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad p \leq -n^2$; (d) $\forall p \in \mathbb{Z}; \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad p \leq -n^2$.

1. Les propositions (a), (b), (c) et (d) sont-elles vraies ou fausses? Jusitifier vos réponses.

   La proposition (a) *est vraie (il suffit de prendre* $n = p = 0$*).*
   La proposition (b) *est fausse, car si un tel* n *existe alors pour* $p = 1$*, par exemple, on a* $1 \leq -n^2$ *qui est absurde.*
   La proposition (c) *est fausse, car si un tel* p *existe alors pour* $n = |p| + 1$ *l'inégalité est absurde. (On peut aussi vérifier que non (c) est toujours vraie).*
   La proposition (d) *est fausse (prendre par exemple pour* $p = 0$ *et* $n = 1$*).*

2. Donner leur négation.

   La négation des propositions:

   Non (a) $\forall p \in \mathbb{Z}; \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad p > -n^2$; *Non (b)* $\exists p \in \mathbb{Z}; \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad p > -n^2$;

   Non (c) $\forall p \in \mathbb{Z}; \quad \exists n \in \mathbb{N}; \quad p > -n^2$; *Non (d)* $\exists p \in \mathbb{Z}; \quad \exists n \in \mathbb{N}; \quad p > -n^2$.

II- Soit E un ensemble et soit f une application de E dans E vérifiant $fof = f$.

1. Montrer, par double implication, l'équivalence entre les propositions (a) et (b) suivantes:

   (a) f injective

   (b) f surjective

   On montre $(a) \Longrightarrow (b)$*: On suppose que* f *est injective montrons que* f *est surjective.* $\forall y \in E, f(y) = f(f(y))$ *étant donné que* $fof = f$*, de plus* f *est injective par hypothèse, alors* $y = f(y)$ *donc* f *est surjective.*
   On suppose maintenant (b) *montrons que* f *est injective. Soit* x_1 *et* x_2 *deux éléments quelconques de* E *tel que* $f(x_1) = f(x_2)$ *l'objectif est de montrer que* $x_1 = x_2$*. Du fait que* f *est surjective alors il existe* $u_1 \in E, x_1 = f(u_1)$ *et il existe* $u_2 \in E, x_2 = f(u_2)$*. La propriété* $fof = f$ *nous prouve que* $f(x_1) = f(f(u_1)) = f(u_1) = x_1$ *et* $f(x_2) = f(f(u_2)) = f(u_2) = x_2$ *et donc* $(f(x_1) = f(x_2)) \Longrightarrow (x_1 = x_2)$ *ceci prouve que* f *est injective.*

2. En déduire l'équivalence : (f injective) $\Longleftrightarrow$ (f bijective)

   D'après la question précédente (f *injective)* $\Longleftrightarrow$ *(*f *surjective)* $\Longleftrightarrow$ *(*f *est donc injective et surjective)* $\Longleftrightarrow$ *(*f *bijective).*

(*Changer de copie*)

Exercice II (7 points)—

Soit $(u_k)_{k\geq 1}$ une suite réelle <u>bornée</u>. On définit la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ par

$$\forall n \geq 1, \quad v_n = \sup\{u_k,\ k \geq n\}.$$

1. On note par $A_n = \{u_k,\ k \geq n\}$. Montrer que A_n est un ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est bien définie.

   L'ensemble $A_n = \{u_k,\ k \geq n\}$ est un ensemble non vide de $\mathbb{R}$ (contient au moins u_n). Du fait que la suite $(u_k)_{k\geq 1}$ est bornée alors on a pour tout $n \geq 1$

   $$\exists M \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R},\ \forall k \geq n, \quad m \leq u_k \leq M.$$

   Ceci prouve que l'ensembe A_n est borné, en particulier majoré (par M). D'après l'axiome de la borne supérieure A_n, non vide et majoré de $\mathbb{R}$, admet une borne supérieure donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est bien définie et on a

   $$\forall n \geq 1, \quad v_n = \sup\{u_k,\ k \geq n\} = \sup A_n.$$

2. Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ non vides majorés tel que $A \subset B$. Montrer que $\sup A \leq \sup B$.

   Les deux sous-ensembles A et B, non vides majorés de $\mathbb{R}$, ont des bornes supérieures, d'après l'axiome de la borne supérieure. Du fait que $A \subset B$ on a $\forall x \in A$, alors $x \in B$. Comme $\sup B$ est un majorant de B il en découle que $\forall x \in A, \quad x \leq \sup B$. Ceci prouve que $\sup B$ est un majorant de A. Or $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, d'où $\sup A \leq \sup B$.

3. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

   Pour tout $n \geq 1$, les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$, A_{n+1} et A_n définis dans la question 1.), sont non vides et majorés. Ils admettent donc des bornes supérieures. Comme

   $$A_{n+1} = \{u_k,\ k \geq n+1\} = \{u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots\} \subset \{u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots\} = A_n$$

   alors d'après le résultat établi dans la question précédente on a $\sup A_{n+1} \leq \sup A_n$ ce qui veut dire aussi que

   $$\forall n \geq 1, \quad v_{n+1} \leq v_n,$$

   ceci prouve que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

4. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge.

   La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ étant décroissante, il suffit de montrer qu'elle est minorée pour prouver sa convergence, d'après le théorème des suites monotones. Or la suite (u_n) est minorée (par m) car parhypothèse elle est bornée. Comme $\forall n \geq 1$ $\sup A_n = v_n \geq u_n$, alors $v_n \geq u_n \geq m$. Donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est minorée, d'où le résultat.

(*Changer de copie*)

Exercice III (7 points)—

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle convergeant vers $l \in \mathbb{R}$. On souhaite établir que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}$$

converge vers la même limite l. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Justifier l'existence d'un entier $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n > N_0$ alors

$$|u_n - l| < \varepsilon/2$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ étant convergeante vers $l \in \mathbb{R}$ alors pour $\varepsilon > 0$, par définition,

$$(1) \qquad \varepsilon/2 > 0;\ \exists N_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n > N_0) \Longrightarrow (|u_n - l| < \varepsilon/2)$$

2. Etablir que pour tout entier $n > N_0$, on a

$$|v_n - l| < \frac{|u_1 - l| + \ldots + |u_{N_0} - l|}{n} + \frac{(n - N_0)}{n}\frac{\varepsilon}{2}$$

Pour tout $n > N_0$, on a

$$\begin{aligned} |v_n - l| &= \left|\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n - nl}{n}\right| = \frac{|(u_1 - l) + (u_2 - l) + \ldots + (u_n - l)|}{n} \\ &\leq \frac{|u_1 - l| + |u_2 - l| + \ldots + |u_{N_0} - l|}{n} + \frac{|u_{N_0+1} - l| + (u_{N_0+2} - l) + \ldots + |u_n - l|}{n} \end{aligned}$$

la dernière inégalité est établie en vertu de l'inégalité triangulaire. Pour le même argument et grâce au résultat (1)

$$\forall n > N_0 \quad |u_{N_0+i} - l| \leq \varepsilon/2; \qquad 1 \leq i \leq n - N_0.$$

On peut donc conclure que

$$(2) \qquad |v_n - l| \leq \frac{|u_1 - l| + \ldots + |u_{N_0} - l|}{n} + \frac{(n - N_0)}{n}\frac{\varepsilon}{2}$$

3. L'entier N_0 étant fixé dans la question 1.), vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n > N_0$ alors

$$\frac{n - N_0}{n} < 1$$

Pour N_0 fixé dans la question 1.*) on a toujours pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n > N_0$ alors $n - N_0 < n$ ou encore $\frac{n - N_0}{n} < 1$.*

4. L'entier N_0 étant fixé dans la question 1.), montrer qu'il existe $N_1 \geq 1$ un entier naturel tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n > N_1$ alors

$$\frac{|u_1 - l| + \ldots + |u_{N_0} - l|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Indication: On remarquera que, pour N_0 fixé, la somme $\sum_{k=1}^{N_0} |u_k - l|$ est indépendante de l'entier naturel n.

Pour N_0 fixé dans la question 1.), la somme $|u_1 - l| + \ldots + |u_{N_0} - l|$ est une constante réelle (positive) indépendante de n, qu'on note C, alors la suite de terme générale C/n est convergente vers 0 ce qui donne que pour $\varepsilon > 0$, par définition,

$$(3) \qquad \varepsilon/2 > 0;\ \exists N_1 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (n > N_1) \Longrightarrow \left(\left|\frac{C}{n}\right| = \frac{C}{n} < \varepsilon/2\right)$$

5. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers la limite l.

Pour $\varepsilon > 0$, en prenant $N = \max(N_0, N_1)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$ si $(n > N) \Longrightarrow (n > N_0)$, donc d'après (2)

$$|v_n - l| \leq \frac{|u_1 - l| + \ldots + |u_{N_0} - l|}{n} + \frac{(n - N_0)}{n}\frac{\varepsilon}{2}$$

et comme aussi $n > N_1$ on contrôle d'après (3) le premier terme de la somme comme suit

$$|v_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{(n - N_0)}{n}\frac{\varepsilon}{2}$$

enfin grâce à l'inégalité de la question 3.), comme $n > N_0$, on retrouve le résultat escompté à savoir, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\exists N = \max(N_0, N_1),\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n > N) \Longrightarrow (|v_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 1.\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon).$$

6. *Application*: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = l$. Montrer que la suite de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge vers l.

Soit la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - u_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. En remarquant que la somme

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_{n-1} - u_{n-2}) + (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_0,$$

alors d'après le résultat établi (théorème de Césaro), comme la suite (v_n) converge vers l alors sa moyenne de Césaro converge aussi vers la même limite l. Soit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n} = l = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - u_0}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n},$$

car la limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_0}{n} = 0$.