Exercices du chapitre 5 avec corrigé succinct

Exercice V.1 Ch5-Exercice1

Calculer la dérivée de $\cos x$ ou point $x = a$.

Solution : On a

$$\cos(a+h) = \cos a \cos h - \sin h \sin a$$

et donc

$$\frac{cos(a+h) - \cos a}{h} = \cos a \frac{\cos h - 1}{h} - \sin a \frac{\sin h}{h}$$

Or $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ et $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$, d'où

$$\lim_{h\to 0} \frac{cos(a+h) - \cos a}{h} = -\sin a$$

Exercice V.2 Ch5-Exercice2

Montrer que la fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Solution : Si la dérivée de $f(x) = |x|$ en 0 existe, elle est donnée par

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

or la quantité $\frac{|h|}{h}$ est égale à 1 si $h > 0$ et à -1 si $h < 0$. Ceci signifie que la limite à droite en 0 est différente de la limite à gauche en 0 et qu'il n'y a donc pas de limite. La fonction n'est donc pas dérivable en 0.

Exercice V.3 Ch5-Exercice3

Montrer que si une fonction est dérivable en a elle est continue en a. Montrer, par un contre-exemple, que la réciproque est fausse.

Solution : Si la fonction est dérivable en a, elle vérifie

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + |h|\varepsilon(h)$$

et si on fait tendre h vers 0, on obtient

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

ce qui signifie que la fonction est continue en a. Par contre une fonction continue n'est pas forcément dérivable, il suffit de considérer la fonction $|x|$ traitée dans l'exercice précédent.

Exercice V.4 Ch5-Exercice4

Soient α un nombre réel et f et g deux fonctions dérivables au point a. Montrer alors que :

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a) \text{ et } (\alpha f)'(a) = \alpha f'(a).$$

Solution : Calculons

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)+g(a+h)-g(a)}{h}$$

et comme les fonctions f et g sont dérivables en a,

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)}{h} = f'(a)+g'(a).$$

De même

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\alpha f)(a+h)-(\alpha f)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \alpha \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \alpha f'(a).$$

Exercice V.5 Ch5-Exercice5

Calculer la fonction dérivée de $\dfrac{\sin x}{x^2+1}$.

Solution :

$$\left(\frac{\sin x}{x^2+1}\right)' = \frac{\cos x(x^2+1) - 2x\sin x}{(x^2+1)^2}$$

Exercice V.6 Ch5-Exercice6

Soit la fonction $f(x) = e^{x^2 \sin x}$, calculer sa dérivée en tout point où elle existe.

Solution :

$$f'(x) = e^{x^2\sin x}(2x\sin x + x^2\cos x).$$

Exercice V.7 Ch5-Exercice7

Écrire les conditions nécessaires que doivent vérifier les extrema des fonctions $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x^3$. En vous aidant d'un graphique précisez si les points satisfaisant ces conditions nécessaires, sont des minima, des maxima ou rien.... Est-ce que $f'(\hat{x}) = 0$ implique que $\hat{x}$ est un extremum ?

Solution : Pour que $\bar{x}$ soit un extremum d'une fonction, il doit annuler la dérivée de la fonction. Or $f'(x) = \cos x$ et $g'(x) = 3x^2$. Les extrema de f sont donc solutions de $\cos\bar{x} = 0$, soit $\bar{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ et les extrema de g sont solutions de $3\bar{x}^2 = 0$. Or si l'on fait un graphe des fonctions f et g, on voit que $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ sont des maxima locaux de f et $\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$ sont des minima locaux de f. Par contre $\bar{x} = 0$ n'est pas un extremum de g (c'est un point d'inflexion !). En conclusion les points qui annulent la dérivée d'une fonction ne sont pas toujours des extrema de cette fonction.

Exercice V.8 Ch5-Exercice8

Soit la fonction $f(x) = x$ sur $[0,1]$. Donner la valeur du minimum et du maximum de f sur l'intervalle considéré. La dérivée de f s'annule-t-elle en ces points ? Conclure.

Solution : Puisque la fonction $f(x) = x$ est strictement croissante, le minimum de f est donné par $f(0) = 0$ et le maximum par $f(1) = 1$. Or $f'(x) = 1$ ce qui signifie que les extrema de f n'annulent pas la dérivée de la fonction. En effet ce ne sont pas des points intérieurs de l'intervalle et la condition nécessaire sur les extrema ne s'applique alors pas.

Exercice V.9 Ch5-Exercice9

Soit f une fonction deux fois dérivable telle que $f(a) = f(b) = f(c)$ $(a < b < c)$. La fonction f'' admet-elle un zéro strictement compris entre a et c ?

Solution : On applique deux fois le théorème de Rolle et donc $\exists \alpha \in]a, b[$ tel que $f'(\alpha) = 0$ et $\exists \beta \in]b, c[$ tel que $f'(\beta) = 0$. En conséquence, on a $\alpha < \beta$ et $f'(\alpha) = f'(\beta)$ et on peut appliquer à nouveau le théorème de Rolle. Ceci donne alors l'existence de $d \in]\alpha, \beta[$ tel que $f''(d) = 0$. Or $a < \alpha < b < \beta < c$, d'où on a $a < d < c$ et $f''(d) = 0$.

Exercice V.10 Ch5-Exercice10

Soient α, β et γ trois nombres réels, on suppose $\alpha \neq 0$. Soit alors la fonction f définie par $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Soit enfin, $]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, avec $a < b$. Déterminer $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Solution : On a

$$f(b) - f(a) = \alpha b^2 + \beta b + \gamma - (\alpha a^2 + \beta a + \gamma) = \alpha(b^2 - a^2) + \beta(b - a)$$

soit

$$f(b) - f(a) = (b - a)(\alpha(a + b) + \beta).$$

Or par le théorème des accroissements finis, il existe c tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$$

d'où, puisque $f'(x) = 2\alpha x + \beta$, on obtient

$$2\alpha c + \beta = \alpha(a + b) + \beta$$

d'où

$$c = \frac{a + b}{2}.$$

Exercice V.11 Ch5-Exercice11

Soit f une fonction deux fois dérivable sur Ω (intervalle ouvert). Soient $x \in \Omega$ et $h > 0$ tels que $x \pm h \in \Omega$. On définit la fonction $G(t) = f(x + th) + f(x - th)$ pour $t \in [0, 1]$.

1. Montrer qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $G(1) - G(0) = G'(\theta)$.
2. En déduire qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que
$$\frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h} = f'(x + \theta h) - f'(x - \theta h).$$
3. En utilisant à nouveau le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel $c \in]x - \theta h, x + \theta h[$ tel que
$$\frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h} = 2\theta h f''(c).$$

Solution :

1. Si on définit $G_1(t) = f(x + th)$, G_1 est dérivable sur $[0, 1]$. En effet, $G_1 = f o l_1$.
L'application l_1 définie par $l_1(t) = x + th$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[0, 1]$, on a de plus $l_1'(t) = h$.
De plus, pour tout t appartenant à $[0, 1]$, $l_1(t) \in [x, x + h] \subset \Omega$, donc la fonction f est dérivable en $l_1(t)$.

En appliquant le théorème sur la dérivée des fonctions composées, G_1 est dérivable et on a

$$G_1'(t) = f'(l_1(t))l_1'(t) = hf'(x+th).$$

De même, si on définit $G_2(t) = f(x-th)$, G_2 est dérivable sur $[0,1]$. En effet, $G_2 = fol_2$.
L'application l_2 définie par $l_2(t) = x - th$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[0,1]$, on a de plus $l_2'(t) = -h$.
De plus, pour tout t appartenant à $[0,1]$, $l_2(t) \in [x-h, x] \subset \Omega$, donc la fonction f est dérivable en $l_2(t)$.
En appliquant le théorème sur la dérivée des fonctions composées, G_2 est dérivable et on a

$$G_2'(t) = f'(l_2(t))l_2'(t) = -hf'(x-th).$$

On a $G = G_1 + G_2$, donc G est dérivable sur $[0,1]$ et on a

$$G'(t) = hf'(x+th) - hf'(x-th).$$

Le théorème des accroissements finis donne l'existence de $\theta \in]0,1[$ tel que $G(1) - G(0) = G'(\theta)$.

2. On calcule
$$G(1) = f(x+h) + f(x-h),\ \ G(0) = 2f(x)$$
Donc en remplaçant, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que
$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h} = f'(x+\theta h) - f'(x-\theta h).$$

3. Si on pose
$$a = x - \theta h, b = x + \theta h$$
Pour $\theta \in [0,1]$, on a $[a,b] \subset [x-h, x+h] \subset \Omega$.
Cette fois, on applique le théorème des accroissements finis à la fonction f' qui est dérivable sur $[a,b]$ et on obtient
$$\exists c \in]a,b[,\quad f'(b) - f'(a) = (b-a)f''(c) \Leftrightarrow \exists c \in]x-\theta h, x+\theta h[,\quad f'(x+\theta h) - f'(x-\theta h) = 2\theta hf''(c)$$
On a donc
$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h} = 2\theta hf''(c).$$

Exercice V.12 Ch5-Exercice12

Soit la fonction $f(x) = x^3$. Est-elle strictement croissante ? A-t-on $f'(x) > 0\, \forall x \in \mathbb{R}$? Conclure.

Solution : Pour montrer que la fonction x^3 est strictement croissante, on prend $x < y$ et on calcule

$$f(y) - f(x) = y^3 - x^3 = (y-x)(y^2 + xy + x^2)$$

Or le terme $y^2 + xy + x^2$ peut être considéré comme un trinôme du second degré en y dont le discriminant est $x^2 - 4x^2 = -3x^2 < 0$, ce qui veut dire qu'il n'a pas de racine réelle et donc qu'il est toujours strictement positif. On en déduit que $f(y) - f(x) > 0$ et la fonction x^3 est strictement croissante. Par contre $f'(x) = 3x^2$ s'annule pour $x = 0$. En conclusion une fonction strictement croissante n'a pas une dérivée strictement positive en tout point.

Exercice V.13 Ch5-Exercice13

Soit la fonction $f(x) = -1/x$ définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Montrer que $f'(x) > 0$ sur le domaine de définition de f. Cette fonction est-elle strictement monotone ? Conclure.

Solution : Pour $x < 0$ ou $x > 0$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$. Or cette fonction n'est pas strictement monotone puisque $f(-1) = 1$ et $f(1) = -1$! Pour que $f'(x) > 0$ sur Ω implique que la fonction est strictement monotone sur Ω il faut que Ω soit un intervalle (et non pas l'union de deux intervalles disjoints !).

Exercice V.14 Ch5-Exercice14

Si l'on approche la valeur de sinus 29° par celle de sinus 30°, encadrer l' erreur commise.

Solution : Nous avons

$$\sin\frac{\pi}{6} - \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos\theta$$

où $\theta \in \left]\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}, \frac{\pi}{6}\right[$. Or la fonction cosinus est décroissante sur cet intervalle, ce qui veut dire que $0 < \cos\theta < \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où

$$\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) < \frac{\pi}{180}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

soit

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{180}\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right) < \frac{1}{2}$$

Exercice V.15 Ch5-Exercice15

En reprenant la démonstration de la condition suffisante de la convexité à partir de la dérivée seconde, montrer que si $\forall x \in \Omega,\ f"(x) > 0$, alors la fonction est strictement convexe sur Ω.

Solution : La seule chose qui est modifiée est que puisque $f''(x) > 0$ et non pas $f''(x) \geq 0$, la monotonie devient stricte et donc la fonction ϕ sera strictement négative sur $]0, 1[$, ce qui conduira à la stricte convexité.

Exercice V.16 Ch5-Exercice16

Soit f une fonction bijective dérivable. On suppose en outre que f^{-1} est dérivable. En utilisant la définition de la fonction réciproque retrouver le résultat :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{(avec } y_0 = f(x_0)\text{)}.$$

Solution : L'application réciproque vérifie $(f^{-1} \circ f)(x) = x$. Si les deux applications sont dérivables on peut donc dériver la fonction composée et obtenir

$$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$$

ce qui donne

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

si $y_0 = f(x_0)$.

Exercice V.17 Ch5-Exercice17

En utilisant leur dérivée, donner une relation qui relie les fonctions **Arc sinus** et **Arc cosinus**.

Solution : Puisque $\operatorname{Arc}\cos' y = -\operatorname{Arc}\sin' y$ en prenant la primitive, on a

$$\operatorname{Arc}\cos y = -\operatorname{Arc}\sin y + C.$$

La constante C est déterminée par $y = 0$, ce qui donne $\frac{\pi}{2} = 0 + C$, d'où

$$\operatorname{Arc}\cos y + \operatorname{Arc}\sin y = \frac{\pi}{2}$$

.

Exercice V.18 Ch5-Exercice18

On considère la fonction définie sur $D =]0,\pi[$ par $\cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$. Définir son application réciproque ainsi que la dérivée de celle-ci.

Solution : La fonction cot est bijective de $[0,\pi]$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque définie de $\mathbb{R}$ sur $[0,\pi]$ dont la dérivée est $-\frac{1}{1+y^2}$ (facile à démontrer).

Exercice V.19 Ch5-Exercice19

Soit r un réel, alors pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ on définira x^r par $x^r = e^{r\ln(x)}$. Montrer que $f(x) = x^r : \mathbb{R}_*^+ \mapsto \mathbb{R}_*^+$, est strictement monotone et que sa réciproque est (le vérifier à l'aide des définitions) :

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{r}} = e^{\frac{1}{r}\ln y}.$$

Calculer sa dérivée.

Solution : La dérivée de $f(x) = e^{r\ln(x)}$ est donnée par $f'(x) = \frac{r}{x}e^{r\ln(x)}$, qui est strictement positive pour $x > 0$. L'image par f de $]0,+\infty[$ est $]0,+\infty[$. Donc la fonction x^r est donc bijective de $\mathbb{R}_*^+$ dans $\mathbb{R}_*^+$. Elle admet donc une application réciproque définie de $\mathbb{R}_*^+$ dans $\mathbb{R}_*^+$ que l'on calcule par

$$y = e^{r\ln(x)} \Leftrightarrow \ln y = r\ln x \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{r}lny$$

donc l'application réciproque de x^r est bien $e^{\frac{1}{r}\ln y} = y^{\frac{1}{r}}$.
