Exercices du chapitre 4 avec corrigé succinct

Exercice IV.1 Ch4-Exercice1

Montrer que l'intersection d'un nombre fini de voisinages de a est un voisinage de a.

Solution : Soient $(\mathcal{V}_{k=1,\ldots,p})$ p voisinages de a. Alors, par définition, il existe $\alpha_k > 0$ tel que $]a-\alpha_k, a+\alpha_k[\subset \mathcal{V}_k$. L'intersection des p voisinages contient l'intersection des p intervalles $]a-\alpha_k, a+\alpha_k[$ qui est aussi un intervalle ouvert $]a-\alpha, a+\alpha[$ où

$$\alpha = \min_{k=1,\ldots,p} \{\alpha_k\}.$$

Exercice IV.2 Ch4-Exercice2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$, montrer qu'elle admet une limite en $x=-1$.

Solution : Celle limite est $l=-2$, puisque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta = \varepsilon,\ (0 < |x+1| < \eta) \Rightarrow (|f(x)+2| < \varepsilon)$$

En effet, x étant différent de -1, on peut simplifier f et obtenir $f(x) = (x-1)$, donc $|f(x)+2| = |x+1|$.

Exercice IV.3 Ch4-Exercice3

Montrer, en utilisant la compatibilité de la multiplication avec la relation d'ordre $\leq$, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad (x \leq \varepsilon) \iff (x^2 \leq \varepsilon^2)$$

Solution : La relation de compatibilité de la multiplication avec la relation d'ordre s'écrit :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ \forall c \in \mathbb{R}^+,\ (a \leq b) \implies (ac \leq bc) \tag{1.1}$$

1. Soient donc x et ε, deux éléments de $\mathbb{R}^+$,tels que $x \leq \varepsilon$, alors :

   $$0 \times x \leq x \times x \leq x \times \varepsilon \leq \varepsilon \times \varepsilon,.$$

   soit effectivement $0 \leq x^2 \leq \varepsilon^2$, ce qui montre que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad (x \leq \varepsilon) \implies (x^2 \leq \varepsilon^2) \tag{1.2}$$

2. Soit maintenant x et ε deux éléments de $\mathbb{R}^+$ tels que $x^2 \leq \varepsilon^2$.
   Par passage à la contraposée, (**??**) s'écrit aussi :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad (x^2 > \varepsilon^2) \implies (x > \varepsilon)$$

   Mais comme x et ε jouent le même rêole, nous avons aussi, de manière équivalente :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad (x^2 < \varepsilon^2) \implies (x < \varepsilon)$$

   D'autre part :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad (x^2 = \varepsilon^2) \iff \{(x-\varepsilon)(x+\varepsilon) = 0\} \iff (x = \varepsilon)$$

   de sorte que nous arrivons à :

   $$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad (x^2 \leq \varepsilon^2) \implies (x \leq \varepsilon)$$

Exercice IV.4 Ch4-Exercice4

Montrer que la fonction $x \to x^2$ admet pour limite 0 en $x = 0$.

Solution : En effet, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta = \sqrt{\varepsilon},\ (0 < |x| < \eta) \Rightarrow (|x^2| < \varepsilon),$$

puisque $x^2 < \eta^2\,(=\varepsilon)$.

Exercice IV.5 Ch4-Exercice5

On considère la fonction $x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. Montrer qu'elle admet en 0 une limite à droite égale à 1 et une limite à gauche égale à -1, mais qu'elle n'admet pas de limite en 0.

Solution : Pour $x > 0$, on a $x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = \sqrt{1+x^2}$ qui tend vers 1 quand x tend vers 0 puisque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta,\ (0 < x < \eta) \Rightarrow (\sqrt{1+x^2} - 1 < \varepsilon),$$

on peut choisir $\eta = \sqrt{(1+\varepsilon)^2 - 1}$. En effet, puisque $x > 0$, on a (voir l'exercice A.1.3 :

$$(\sqrt{1+x^2} - 1 < \varepsilon) \Leftrightarrow (x^2 < (1+\varepsilon)^2 - 1) \Leftrightarrow (x < \sqrt{(1+\varepsilon)^2 - 1}).$$

Faire le mêeme raisonnement pour $x < 0$ avec la différence que $x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = -\sqrt{1+x^2}$ qui tend vers -1 quand x tend vers 0.
f n'admet pas de limite en 0 puisque la limite à droite est différente de la limite à gauche.

Exercice IV.6 Ch4-Exercice6

Montrer que f admet une limite en a si et seulement si f admet une limite à gauche et une limite à droite en a qui sont égales.

Solution :

1. Si f admet une limite l en a, alors l est limite à gauche et limite à droite en a.
2. Réciproquement, écrivons que $f(a+0) = f(a-0) = l$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_1,\ (a < x < a+\eta_1) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_2,\ (a-\eta_2 < x < a) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon).$$

Il suffit alors de prendre $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ pour montrer que f admet une limite en a égale à l.

Exercice IV.7 Ch4-Exercice7

Soit la fonction $x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. Trouver une suite (x_n) qui tend vers 0 et telle que $(f(x_n))$ ne tend par vers 1. En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ (si elle existe) est différente de 1.

Solution : Soit la suite $x_n = -\frac{1}{n}$, alors cette suite tend vers 0 et la suite $f(x_n) = -\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$ tend vers -1. D'où la limite en 0 ne peut êetre égale à 1 puisque l'on a exhibé une suite (x_n) qui tend vers 0 alors que la suite $(f(x_n))$ ne tend pas vers 1.

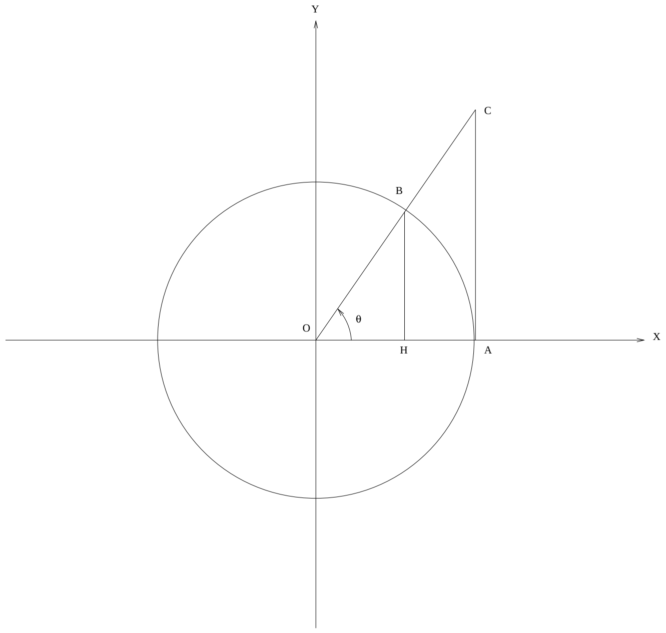

FIGURE 1.1 – longueur d'arc et sinus

Exercice IV.8 Ch4-Exercice8

En utilisant le théorème des gendarmes, montrer que $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$.

Solution : Si l'on regarde (voir la figure (**??**)). sur un graphique la longueur d'arc de cercle (de rayon 1) correspondant à un angle au centre θ (exprimé en radian), on a, pour $\theta \in [0, \pi/2]$: $0 \leq \sin\theta \leq \theta$. Si l'on fait tendre θ vers $0+$, alors $\sin\theta$ tend vers 0. Si maintenant on prend $\theta \in [-\pi/2, 0]$, alors on a $\theta \leq \sin\theta \leq 0$ et si l'on fait tendre θ vers $0-$, alors $\sin\theta$ tend vers 0. La fonction $\sin\theta$ ayant une limite à droite égale à la limite à gauche en 0, sa limite en 0 est égale à 0.

Exercice IV.9 Ch4-Exercice9

1. On suppose que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et que $|f(x)| \leq g(x)$ pour $x > A > 0$, montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. Soient trois fonctions f_1, f_2 et g telles que $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$ pour $x > A > 0$. Si f_1 et f_2 ont même limite l à l'infini, montrer que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = l$.
3. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+3}{x+2} = 1$.

Solution :

1. écrivons que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ alors :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists B > 0,\ (x > B) \Rightarrow (g(x) < \varepsilon).$$

Or pour $x > A > 0$, on a $|f(x)| \leq g(x)$, donc

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists C = \max\{A, B\} > 0,\ (x > C) \Rightarrow (|f(x)| < \varepsilon).$$

2. De même que pour la première question on refait les démonstrations du théorème de comparaison 4.1.4 en remplaçant $\exists\eta$ par $\exists B > 0$ et $0 < |x - a| < \eta$ par $x > B$.
3. Pour $x > 0$, on a $0 < \dfrac{x+3}{x+2} - 1 = \dfrac{1}{x+2} \leq \dfrac{1}{x}$, et puisque $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} (\dfrac{x+3}{x+2} - 1) = 0$ soit $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+3}{x+2} = 1$.

Exercice IV.10 Ch4-Exercice10

On suppose que la fonction f est strictement négative (resp. positive) au voisinage d'un point a, quel est le signe de la limite de f au point a? Donner un exemple de chacun des cas.

Solution : Puisque $f(x) < 0$ (resp. $f(x) > 0$) au voisinage de a, en appliquant le résultat sur la comparaison des limites, on obtient $\lim_{x\to a} f(x) \leq 0$ (resp. $\lim_{x\to a} f(x) \geq 0$).
Par exemple $\sqrt{|x|} > 0$ (resp. $-\sqrt{|x|} < 0$) pour tout x, donc évidemment dans un voisinage de 0, et $\lim_{x\to 0} \sqrt{|x|} = 0$ (resp. $\lim_{x\to 0} -\sqrt{|x|} = 0$).

Exercice IV.11 Ch4-Exercice11

Sachant que $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$, calculer $\lim_{x\to 0} \cos x$ en utilisant la composition des fonctions.

Solution : Pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$. Puisque $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$, $\lim_{y\to 0} 1 - y^2 = 1$ et que $\lim_{z\to 1} \sqrt{z} = 1$ en composant toutes ces fonctions et en appliquant le théorème sur la composition des limites, on obtient que $\lim_{x\to 0} \sqrt{1-\sin^2 x} = 1$.

Exercice IV.12 Ch4-Exercice12

Montrer que $\sqrt{x} \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

Solution : La fonction racine carrée est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Donc quel que soit le réel A, si $x > A^2$ alors $\sqrt{x} > \sqrt{A^2} = |A|$.
Or on a toujours $|A| \geq A$ donc $\sqrt{x} > A$.
On a donc montré que quel que soit A il existe $B = A^2$ tel que $\{(x > B) \Rightarrow (f(x) > A)\}$.

Exercice IV.13 Ch4-Exercice13

Soient deux fonctions f et g définies au voisinage de a et telles que $g(x) \to +\infty$ quand $x \to a$. Montrer que si f est minorée, au voisinage de a, par un réel strictement positif, alors $f(x)g(x) \to +\infty$ quand $x \to a$.

Solution : f est minorée par un réel strictement positif au voisinage de a, donc

$$\exists m > 0,\ \exists \eta_1 > 0, \{x \in]a-\eta_1, a+\eta_1[\Rightarrow\ f(x) > m > 0\}.$$

D'autre part $g(x) \to +\infty$ quand $x \to a$, donc :

$$\forall A' \in \mathbb{R},\ \exists \eta_2 > 0,\ (0 < |x-a| < \eta_2) \Rightarrow (g(x) > A'),$$

Etant donné A quelconque, on définit $A' = |A|/m$, $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ et on a alors :

$$(0 < |x-a| < \eta) \Rightarrow (0 < |x-a| < \eta_2) \Rightarrow (g(x) > A') \Rightarrow (f(x)g(x) > A'f(x))$$

Attention à la manipulation des inégalités, on a utilisé le fait que $f(x) > 0$.
On sait de plus que :

$$(0 < |x-a| < \eta) \Rightarrow (0 < |x-a| < \eta_1) \Rightarrow (f(x) > m) \Rightarrow (A'f(x) \geq A'm).$$

On a utilisé le fait que $A' \geq 0$.
On a donc

$$(0 < |x-a| < \eta) \Rightarrow (g(x) > A') \Rightarrow (f(x)g(x) > A'f(x)) \Rightarrow (f(x)g(x) > A'm)$$

Or $A'm = |A|$, et on toujours $|A| \geq A$, on a donc finalement :

$$(0 < |x-a| < \eta) \Rightarrow (f(x)g(x) > |A| \geq A)$$

ce qui termine de démontrer que $f(x)g(x) \to +\infty$ quand $x \to a$.

Exercice IV.14 Ch4-Exercice14

Soit f telle que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ avec $l > 0$.

1. Montrer, en utilisant la définition de la limite qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $0 < |x-a| < \eta$ alors $f(x) > \frac{l}{2}$.
2. On suppose que $g(x) \to +\infty$ quand $x \to a$, montrer que $f(x)g(x) \to +\infty$ quand $x \to a$.
3. Montrer que les résultats précédents sont encore valables quand x tend vers l'infini.
4. Appliquer ce résultat pour calculer la limite de $\dfrac{x+1}{2x-1}e^x$ quand $x \to +\infty$.

Solution :

1. écrivons la définition de $\lim_{x\to a} f(x) = l$:
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ (0 < |x-a| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - l| < \varepsilon).$$
Puique $l > 0$, on peut choisir $\varepsilon = \frac{l}{2}$, on a donc l'existence de η tel que :
$$(0 < |x-a| < \eta) \Rightarrow \left(\frac{l}{2} < f(x) < \frac{3l}{2}\right),$$
ce qui prouve le résultat.
2. On applique l'exercice A.1.13 puisque l'on vient de montrer que f est minorée par $\frac{l}{2} > 0$ dans un voisinage de a.
3. Les résultats précédents sont encore valables quand x tend vers l'infini. En effet on remplace $0 < |x-a| < \eta$ par $x > B$.
4. On a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+1/x}{2-1/x} = \frac{1}{2}(>0)$$
et $e^x \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, d'où $\dfrac{x+1}{2x-1}e^x \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

Exercice IV.15 Ch4-Exercice15

Voici quelques exemples d'indéterminations que vous allez traiter.

($\frac{0}{0}$) Soit $f(x) = x^\alpha$, $g(x) = x^\beta$, où α et β sont deux réels positifs. Donner $\lim_{x\to 0+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ en fonction des valeurs de α et β.

($\frac{\infty}{\infty}$) Inspirez-vous du cas ($\frac{0}{0}$) pour trouver un exemple.

($\infty - \infty$) Soit $f(x) = x$, $g(x) = x - h(x)$. Il est clair que le comportement de $(f-g)(x)$ quand $x \to +\infty$ peut être très différent selon celui de la fonction h. Trouver une fonction h qui tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$, telle que g tend aussi vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.

($0 \times \infty$) Comment peut-on se ramener à la forme ($\frac{0}{0}$) ?

Solution :

1. On a $\dfrac{f(x)}{g(x)} = x^{\alpha-\beta}$, soit :
$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ +\infty & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$$
2. On prend $f(x) = \dfrac{1}{x^\beta}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, on fait tendre x vers 0 par valeurs supérieures, on a les mêmes résultats.
3. Il suffit de prendre $h(x) = \dfrac{x}{2}$. Par contre si l'on prend $h(x) = 1$, on ne trouve absolument pas le même résultat pour $f - g$.
4. En écrivant $f.g = \dfrac{f}{1/g}$, on voit que cette forme indéterminée peut-être ramenée à la forme ($\frac{0}{0}$).

Exercice IV.16 Ch4-Exercice16

En utilisant le fait que $\sin x$ et $\cos x$ sont continues en 0, montrer que $\sin x$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

Solution : On écrit que $\sin x = \sin((x-a)+a)$ et on utilise les relations trigonométriques

$$\sin((x-a)+a) - \sin a = \sin(x-a)\cos a + \cos(x-a)\sin a - \sin a = \sin a(\cos(x-a)-1) + \sin(x-a)\cos a$$

et donc

$$|\sin(x-a+a) - \sin a| \leq |\sin a||\cos(x-a)-1| + |\cos a||\sin(x-a)|$$

On utilise alors le fait que $\lim_{y\to 0} \sin y = 0$ et $\lim_{y\to 0} \cos y = 1$ et on considère $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists \eta_1 > 0,\ (|y| < \eta_1) \Rightarrow (|\sin y| < \varepsilon/|\cos a|)$$

$$\exists \eta_2 > 0,\ (|y| < \eta_2) \Rightarrow (|\cos y - 1| < \varepsilon/|\sin a|)$$

Si on pose $y = x - a$ et si on prend $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$, on obtient

$$|x-a| < \eta \Rightarrow |\sin x - \sin a| < 2\varepsilon$$

ce qui montre la continuité de $\sin x$ au point a.

Exercice IV.17 Ch4-Exercice17

écrire la définition de : f n'est pas continue au point a. Montrer alors que la fonction de Heaviside H définie par $H(x) = 0$ pour $x < 0$ et $H(x) = 1$ pour $x > 0$ n'est pas continue en 0, quelle que soit la valeur qu'on lui attribue au point $x = 0$.

Solution : H n'est pas continue au point a s'écrit :

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \eta > 0,\ \exists x \text{ tel que } (|x-a| < \eta) \textbf{ et } (|H(x) - H(a)| \geq \varepsilon)$$

On prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on choisit $\eta > 0$ quelconque.

1. Si $H(0) \geq \frac{1}{2}$, posons $x = -\frac{\eta}{2}$, alors

$$(|x| < \eta) \textbf{ et } (|H(x) - H(0)| = H(0) \geq \varepsilon)$$

2. Si $H(0) \leq \frac{1}{2}$, posons $x = \frac{\eta}{2}$, alors

$$(|x| < \eta) \textbf{ et } (|H(x) - H(0)| = 1 - H(0) \geq \varepsilon)$$

€

Exercice IV.18 Ch4-Exercice18

Démontrer en utilisant les suites que la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en 0.

Solution : On peut prendre par exemple $x_n = \dfrac{1}{n}$. Alors $f(x_n) = 1$ et cette suite ne tend pas vers $f(0) = 0$!

Exercice IV.19 Ch4-Exercice19

Connaissant la continuité des fonctions élémentaires montrer que, par exemple, les fonctions $\sin x^p$, e^{-x^2}, $\ln(x^2+1)$, … sont des fonctions continues en tout point de $\mathbb{R}$. Construire des fonctions continues assez compliquées…

Solution : Ce sont toutes des composées de fonctions continues …

Exercice IV.20 Ch4-Exercice20

Soit $p(x)$ un polynêome de degré impair à coefficients réels. En utilisant le fait que $p(x) \to \pm\infty$ quand $x \to \pm\infty$, montrer qu'il existe a et b tels que $p(a) > 0$ et $p(b) < 0$. En déduire qu'un polynêome de degré impair a au moins une racine réelle.

Solution : Supposons que le coefficient du plus haut degré est positif. Puisque $p(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, cela donne :

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0,\ (x > B) \Rightarrow (p(x) > A).$$

Il existe donc au moins $b \in \mathbb{R}$ tel que $p(b) > 0$. On fait le même raisonnement en $-\infty$ et on obtient $a \in \mathbb{R}$ tel que $p(a) < 0$. Puisqu'un polynêome est une fonction continue et que $p(a)p(b) < 0$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $p(c) = 0$.
Refaire le raisonnement lorsque le coefficient du plus haut degré est négatif.

Exercice IV.21 Ch4-Exercice21

On suppose que $a \leq b$, soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a,b]$, à valeurs dans ce segment. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = x$.

Solution : Soit $g(x) = f(x) - x$, alors $g(a) = f(a) - a$ et puisque $f(x) \in [a,b]$, alors $g(a) \geq 0$, on montre de même que $g(b) \leq 0$. Si g s'annule en a ou b, alors un point fixe de f est a ou b. Si g ne s'annule ni en a ni en b, alors $g(a)g(b) < 0$ et $\exists c \in]a,b[$ tel que $g(c) = 0$ et c est un point fixe de f.

Exercice IV.22 Ch4-Exercice22

Quelle est l'image du segment $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $\sin x$, par $\cos x$?

Solution : L'image par $\sin x$ de $[-\pi/2, +\pi/2]$ est $[-1,1]$ et par $\cos x$ c'est $[0,1]$.

Exercice IV.23 Ch4-Exercice23

Peut-on prolonger par continuité la fonction $\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ en 0 ?

Solution : Puisque l'on a montré dans l'exemple B.1.2 que $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$, on peut donc prolonger cette fonction par continuité.

Exercice IV.24 Ch4-Exercice24

Montrer que si f est une fonction strictement monotone définie sur un intervalle I, alors elle est injective.

Solution : Soit $x \neq y$, alors soit $x < y$ et $f(x) < f(y)$ (f est strictement croissante), soit $x > y$ et $f(x) > f(y)$. Dans tous les cas on obtient $f(x) \neq f(y)$, ce qui est la définition d'une fonction injective.

Exercice IV.25 Ch4-Exercice25

Étudier la convergence simple sur D des suites de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ suivantes

1. $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ avec $D = [0,+\infty[$,
2. $f_n(x) = \frac{2nx^2-1}{nx+x^2}$ avec $D =]0,+\infty[$,
3. $f_n(x) = \max(0, 1-nx)$ avec $D = [0,1]$.

Solution :

1. Pour $x = 0$, la suite $(f_n(x))$ est contante égale à 0 donc converge vers 0.
   Pour $x \neq 0$ fixé, on utilise les équivalents lorsque $n \to \infty$:
   $$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx} \sim \frac{nx}{nx} = 1,$$
   donc la suite $(f_n(x))$ converge vers 1.
   La suite de fonction (f_n) converge simplement sur D vers la fonction f définie par
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$
2. Pour $x > 0$ fixé, on utilise les équivalents lorsque $n \to \infty$:
   $$f_n(x) = \frac{2nx^2-1}{nx+x^2} \sim \frac{2nx^2}{nx} = 2x,$$
   donc la suite $(f_n(x))$ converge vers $2x$.
   La suite de fonction (f_n) converge simplement sur D vers la fonction f définie par $f(x) = 2x$.
3. Ici, il faut représenter garphiquement les premiers termes de la suite.
   La suite de fonction (f_n) converge simplement sur D vers la fonction f définie par
   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \in]0,1]. \end{cases}$$

Exercice IV.26 Ch4-Exercice26

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D = [0,+\infty[$ on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{(x+n)^3}$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur D vers la fonction identiquement nulle.
2. Montrer que la série de terme général f_n converge sur D vers une fonction continue.

Solution :

1. Pour $x \in D$ fixé, on a
   $$0 \leq f_n(x) \leq f_n(x) + \frac{n}{(x+n)^3} = \frac{1}{(x+n)^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$
   On a donc $u_n = \sup\{|f_n(x)|;\ x \in D\} \leq \frac{1}{n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. La convergence de (f_n) vers la fonction constante égale à 0 est uniforme.
2. La suite de fonction (f_n) étant continue, la suite des sommes partielles (S_n) définie pour tout $x \in D$ par
   $$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$
   est également continue (par somme finie de fonctions continues). Il suffit alors de démontrer la convergence uniforme de (S_n). Sans déterminer la limite, on sait que la suite (S_n) converge simplement vers une fonction S. Il suffit d'appliquer les règles de Riemann pour $x \in D$ fixé :
   $$0 \leq S_n(x) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}.$$

La suite $(S_n(x))$ est une somme de terme positif donc elle est croissante. La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge donc est elle majorée et $(S_n(x))$ aussi. On en déduit que $(S_n(x))$ converge et on note $S(x)$ sa limite.
Ensuite on majore $(S_n - S)$ indépendamment de $x \in D$ comme suit :

$$|S_n(x) - S(x)| = |S(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Comme la majoration est valable pour tout $x \in D$, on a

$$\sup\{|S_n(x) - S(x)|;\ x \in D\} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \ell - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0.$$

La convergence de (S_n) vers sa limite simple S est uniforme.

Exercice IV.27 Ch4-Exercice27

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in D =]0, +\infty[$ on pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in D,\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq \frac{1}{n+1}$.
2. En déduire que la série de terme général f_n converge uniformément sur D.
3. Montrer que $\sum_{n\geq 0} f_n$ ne converge pas normalement sur D.

Solution :

1. Effectuons le changement de variable $p = k - (n+1)$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1+p}}{x+n+1+p} = \frac{(-1)^{n+1}}{x+n+1} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2+p}}{x+n+2+p}.$$

Si n est pair, on écrit $n = 2m$ puis

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2m+2+p}}{x+2m+2+p} &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2m+2+2p}}{x+2m+2+2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2m+2+2p+1}}{x+2m+2+2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{x+2m+2+2p} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{x+2m+2+2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{x+2m+2+2p} - \frac{1}{x+2m+2+2p+1} \geq 0.\end{aligned}$$

De même, on montre que si n est impair alors

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2+p}}{x+n+2+p} \leq 0.$$

Par conséquent,

$$\text{Si } n \text{ est pair alors,} \quad -\frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} \leq 0$$

$$\text{Si } n \text{ est impair alors,} \quad 0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} \leq \frac{1}{n+1}.$$

D'où l'inégalité en valeur absolue.

2. Pour $x > 0$ fixé, on démontre que la suite des sommes partielles $(S_n(x))$ converge en montrant que les suites $(S_{2n}(x))$ et $(S_{2n+1}(x))$ sont adjacentes. On note $S(x)$ la limite (sans la déterminer).
   D'après la question **1.**, on a pour tout $x \in D$

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

   donc $\sup\{|S_n(x) - S(x)|;\ x \in D\} \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$. La convergence de (S_n) vers sa limite simple S est uniforme.
3. La convergence n'est pas normale car pour $u_n = \sup\{|f_n(x)|;\ x \in D\}$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge. En effet, d'après les règles de Riemann on a

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \geq \sum_{k=1}^{n} |f_k(1)| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty.$$