Corrigé des exercices « Principe fondamental de la dynamique »

Exercice 1

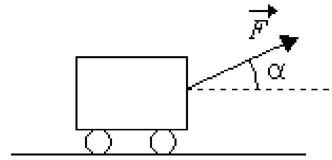
a. Un véhicule parcourt 72 km en 50 minutes. Calculer sa vitesse moyenne et donner le résultat en km/h puis en m/s.

La vitesse v est donnée en fonction de la distance parcourue d et de la durée Δt du déplacement par

$$v = \frac{d}{\Delta t}$$

$$v = \frac{72.10^3}{50 \times 60} = 24 \text{ m/s} \quad \text{ou} \quad v = \frac{72}{50} \times 60 = 86{,}4 \text{ km/h}$$

b. Déterminer les expressions des composantes horizontale et verticale de la force $\vec{F}$ en fonction de son module, noté F, et de l'angle α.



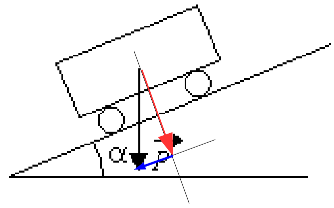
Application numérique : $F = 100$ N et $\alpha = 30°$

Il faut utiliser les relations trigonométriques :

Horizontale : $F_h = F \cos\alpha = 100 \cos 30 = 86{,}6$ N

Verticale : $F_v = F \sin\alpha = 100 \sin 30 = 50$ N

c. Le schéma ci-dessous représente un solide sur un plan incliné. Le poids $\vec{P}$ est décomposé en une composante selon la direction du plan incliné et une composante selon la direction perpendiculaire à ce même plan. Déterminer les expressions de ces composantes en fonction de m (masse du solide), g et α.

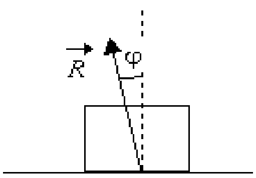


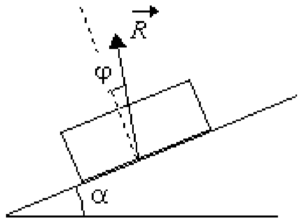
Il faut dessiner les deux composantes puis placer l'angle α et enfin utiliser les relations trigonométriques :

Composante selon la direction du plan incliné (en bleu) : $P_t = -mg \sin\alpha$, le signe « - »traduit que l'axe selon le plan incliné est orienté vers la droite.

Composante selon la direction perpendiculaire au plan incliné (en rouge) : $P_n = -mg \cos\alpha$, le signe « - »traduit que l'axe perpendiculaire au plan incliné est orienté vers le haut.

d. Pour les deux situations représentées ci-dessous, exprimer les composantes normale et tangentielle de la réaction du support en fonction du module de la force $\vec{R}$, noté R, et de l'angle φ.





Dans les deux cas, on trouve :

Composante normale : $R_n = R \cos\varphi$

Composante tangentielle: $R_t = R \sin\varphi$

Exercice 2

L'évolution de la vitesse d'un pont roulant en fonction du temps peut être caractérisée comme suit :

- entre 0 et t_1 : montée en vitesse à accélération constante pendant 8 s,
- entre t_1 et t_2 : fonctionnement à vitesse constante égale à 60 m/min,

- entre t_2 et t_3 : freinage à décélération constante pendant 8 s.

  a. Tracer la courbe représentant l'évolution de la vitesse entre 0 et l'instant t_3.

  b. Calculer l'accélération du pont entre 0 et t_1 et exprimer le résultat dans l'unité du système international.

L'unité d'accélération du système international est le m/s^2, pour déterminer l'accélération, il faut exprimer la vitesse en m/s : 60 m/min correspondent à 1 m/s. D'où l'accélération $a=\frac{dv}{dt}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ car l'accélération est constante. $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{1-0}{t_1-0}=\frac{1}{8}=0{,}125\ \text{m/s}^2$

  c. Déduire du résultat précédent la distance parcourue par le pont pendant cette phase d'accélération.

Pendant cette phase la vitesse augmente de 1 m/s toute les secondes soit $v=at+v_0$ avec v_0 la vitesse initiale (nulle ici donc $v_0=0$). Soit $v=at$.

La distance ΔL parcourue est obtenue par $\Delta L=\frac{1}{2}at_1^2=\frac{1}{2}0{,}125\times 8^2=4\,\text{m}$

  d. Calculer la distance parcourue lors du freinage.

La décélération se faisant avec la même valeur que l'accélération, la distance parcourue est la même soit 4 m.

  e. Calculer la durée de la phase à vitesse constante si la distance totale parcourue pendant le cycle est égale à 30 m.

Il reste $30-2\times 4=22\ \text{m}$ à parcourir à 60 m/min (ou 1 m/s) ce qui durera 14 s.

Exercice 3

Pour soulever un solide de masse *M*, on propose les deux solutions schématisées à la page suivante :

Les masses des câbles et des poulies sont négligeables.

  a. Placer le poids du solide sur chaque schéma.

Son point d'application est au centre d'inertie, sa direction est verticale, son sens vers le centre de la terre (vers le bas) et son module est égal à Mg (voir en bleu sur les schémas)

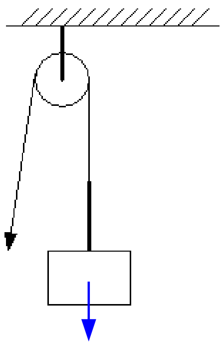
  b. Exprimer pour les deux situations le module de la force nécessaire pour maintenir le solide en équilibre en fonction de *M* et de l'accélération de la pesanteur.

Sur le graphe de gauche, le poids se retrouve sur le câble du treuil, celui-ci doit donc exercer Mg pour qu'il y ait équilibre.

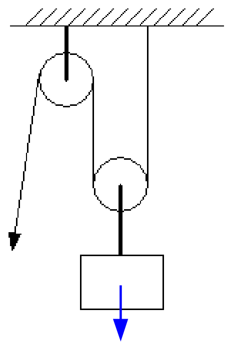
Sur le graphe de droite, le poids se répartit sur le brin de droite (lié au support supérieur fixe) et sur le brin de gauche du treuil, celui-ci doit donc exercer $\frac{Mg}{2}$ pour qu'il y ait équilibre.

Remarque : pour déplacer le poids de la même hauteur, il faudra dérouler deux fois plus de câble dans le cas de droite.

- Treuil

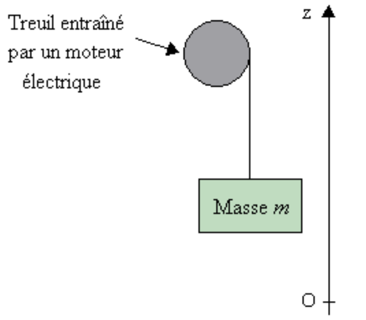


- Palan



Exercice 4 : Système de levage, partie translation

On considère un système de levage constitué d'un treuil (de masse négligeable) entraîné par un moteur électrique. L'objectif est de lever un objet de masse m selon une trajectoire verticale.



Le schéma ci-contre représente le système.
Le vecteur vitesse a une seule composante non nulle notée v_z (selon l'axe vertical Oz orienté vers le haut). Elle est positive lorsque la masse monte. Pour le vecteur accélération, la seule composante non nulle est notée a_z .

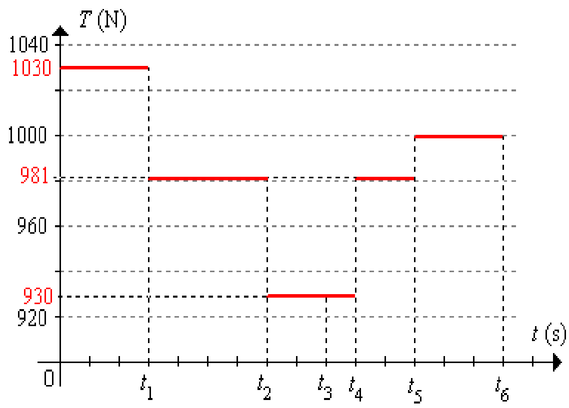
1. **Mise en équation**
   a. Choisir le système (indéformable).
   b. Faire le bilan des forces extérieures agissant sur la masse m. Représenter ces forces sur un schéma sans tenir compte d'une échelle.
   c. Écrire l'équation vectorielle traduisant le principe fondamental de la dynamique.
   d. Projeter cette équation sur l'axe vertical Oz (orienté de bas en haut).

Voir http://www.etasc.fr/index.php/page/cours/miseEquaSystLevage/physiqueGenerale:pfd

Pour la suite, on utilise l'équation $-mg+T=m\frac{dv_z}{dt}$ ou $-mg+T=ma_z$

2. **Application numérique**

La masse de 100 kg est initialement arrêtée, la tension du câble imposée sur le treuil varie selon le graphe ci-contre.
Pour les calculs, on prend $g = 9{,}81\ \text{m.s}^{-2}$.



   a. Calculer a_z entre 0 et t_1.
   Quelle vitesse est atteinte à t_1 en prenant $t_1 = 1{,}5$ s ?

D'après $-mg+T=ma_z$, on a $a_z=\frac{-mg+T}{m}$

soit $a_z=\frac{-100\times 9{,}81+1030}{100}=0{,}49\ \text{m/s}^2$

$a_z=\frac{\Delta v_z}{\Delta t}$ car elle est constante ; la vitesse a donc augmenté de $\Delta v_z=a\times\Delta t=0{,}49\times 1{,}5=0{,}735\ \text{m/s}$ en 1,5 s. Comme la vitesse initiale est nulle alors $v_z(t_1)=0{,}735\ \ \text{m/s}$

   b. Calculer a_z entre t_1 et t_2. Calculer la durée $t_2 - t_1$ pour que la charge monte de 5 m.

La relation $a_z=\frac{-mg+T}{m}$ est toujours valable et devient $a_z=\frac{-100\times 9{,}81+981}{100}=0\ \text{m/s}^2$: la vitesse est constante et égale à la valeur trouvée précédemment (0,735 m/s).

Entre t_1 et t_2 , la charge monte de 5 m à la vitesse de 0,735 m/s soit $t_2-t_1=\frac{5}{0{,}735}=6{,}80\ \text{s}$

   c. Calculer a_z entre t_2 et t_3. Au bout de combien de temps la charge est-elle arrêtée (à l'instant noté t_3) ? Calculer la vitesse atteinte à l'instant t_4, deux secondes après le passage par la vitesse nulle.

La relation $a_z=\frac{-mg+T}{m}$ est toujours valable et devient $a_z=\frac{-100\times 9{,}81+930}{100}=-0{,}51\ \text{m/s}^2$. Le signe « - » signifie que la composante verticale de l'accélération est négative : la composante de la vitesse selon cette direction va diminuer.

$a_z = \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$ car elle est constante et on cherche la durée au bout de laquelle la vitesse s'annule : $a_z = -0{,}51\ \text{m/s}^2$, $\Delta v_z = -0{,}735\ \text{m/s}$ (valeur négative car la vitesse finale est plus faible que la vitesse initiale) et $\Delta t = t_3 - t_2$. On obtient $t_3 - t_2 = \frac{\Delta v_z}{a_z} = \frac{-0{,}753}{-0{,}51} = 1{,}44\ \text{s}$

À l'instant t_4 (deux secondes après t_3), la composante verticale de la vitesse a « augmenté » de $-0{,}51 \times 2 = -1{,}02\ \text{m/s}$.

d. Calculer a_z entre t_4 et t_5. Calculer le temps pour que la charge descende de 10 m.

L'accélération est de nouveau nulle, la charge descend à vitesse constante. On a donc $t_5 - t_5 = \frac{-10}{-1{,}02} = 9{,}8\ \text{s}$. Remarque les deux signes « - » traduisent que le mouvement de la charge est vers le bas.

e. Calculer a_z entre t_5 et t_6. Au bout de combien temps la charge est-elle arrêtée ?

La relation $a_z = \frac{-m g + T}{m}$ est toujours valable et devient $a_z = \frac{-100 \times 9{,}81 + 1000}{100} = 0{,}19\ \text{m/s}^2$. La composante verticale de la vitesse devient de moins en moins négative.

$a_z = \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$ car elle est constante et on cherche la durée au bout de laquelle la vitesse s'annule : $a_z = 0{,}19\ \text{m/s}^2$, $\Delta v_z = 1{,}02\ \text{m/s}$ (valeur positive car la vitesse finale est plus grande en valeur absolue que la vitesse initiale) et $\Delta t = t_6 - t_5$. On obtient $t_6 - t_6 = \frac{\Delta v_z}{a_z} = \frac{1{,}02}{0{,}19} = 5{,}37\ \text{s}$

f. Représenter l'évolution de v_z en fonction du temps. Indiquer pour chaque intervalle si la charge est en montée ou en descente.

De 0 à t_1 : montée (accélération)

De t_1 à t_2 : montée à vitesse constante

De t_2 à t_3 : décélération en montée

De t_3 à t_4 : accélération en descente

De t_4 à t_5 : descente à vitesse constante

De t_5 à t_6 : décélération en descente (si t_6 est l'instant pour lequel la vitesse s'annule)

3. Généralisation

a. Quelle est la valeur de $\frac{d v_z}{dt}$ si la vitesse est constante ? Le signe de la vitesse est-il connu ?

Dans ce cas $\frac{d v_z}{dt}$ est nulle mais il n'est pas possible de connaître son signe : voir entre t_1 et t_2 puis entre t_4 et t_5.

b. Quel est le signe de $\frac{d v_z}{dt}$ si v_z augmente ? Le signe de v_z est-il connu ?

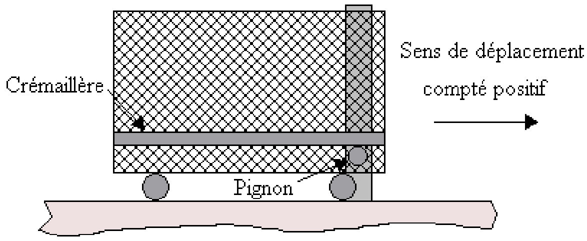
Dans ce cas $\frac{d v_z}{dt}$ est positive mais il n'est pas possible de connaître son signe : voir entre 0 et t_1 puis entre t_5 et t_6.

c. Quel est le signe de $\frac{dv_z}{dt}$ si v_z diminue ? Le signe de v_z est-il connu ?

Dans ce cas $\frac{dv_z}{dt}$ est négative mais il n'est pas possible de connaître son signe : voir entre t_2 et t_3 puis entre t_3 et t_4.

Exercice 5 : Portail coulissant, partie translation

Le système étudié est un portail motorisé par l'intermédiaire d'un système pignon crémaillère. Le pignon est entraîné par un moteur électrique. Le portail repose sur le sol par l'intermédiaire de deux roues à « gorges » roulant sur un rail.



Données :
Masse du portail : m = 300 kg
Coefficient d'adhérence : $\tan\varphi_0=0{,}2$
Coefficient de frottement : $\tan\varphi=f=0{,}1$

1. **Mise en équation**
   a. Choisir le système (indéformable).
   b. Faire le bilan des forces extérieures. Placer ces forces sur un schéma (pas d'échelle).
   c. Écrire l'équation vectorielle traduisant le principe fondamental de la dynamique.
   d. Projeter cette équation sur l'axe vertical (orienté de bas en haut) puis sur l'axe horizontal (orienté de la gauche vers la droite).

Pour la suite, les composantes des forces de réaction sont supposées identiques et également réparties sur chaque roue : $R_{1t}=R_{2t}=R_t$ et $R_{1n}=R_{2n}=R_n$.

   e. Déduire R_n de l'équation obtenue sur l'axe vertical.
   f. Exprimer R_t à partir de la valeur du coefficient de frottement f et du résultat précédent.
   g. Établir à partir de l'équation obtenue sur l'axe horizontal et du résultat précédent, la relation entre F, f, m et la composante horizontale de la vitesse notée v_x .

Voir http://www.etasc.fr/index.php/page/cours/miseEquaPortailMot/physiqueGenerale:pfd

Pour la suite, on utilise l'équation $-f\,m\,g+F=m\frac{dv_x}{dt}$ ou $-f\,m\,g+F=m\,a_x$

2. **Application numérique, calculer *F* dans les situations suivantes :**
   a. Déplacement à vitesse constante.

On a alors $a_x=0$ ce qui donne $F=f\,m\,g=0{,}1\times300\times9{,}81=294{,}3\text{ N}$

   b. Déplacement avec une accélération de 0,5 m.s^{-2}.

L'équation $-f\,m\,g+F=m\,a_x$ donne

$$F=m\,a_x+f\,m\,g=m(a_x+f\,g)=300(0{,}5+0{,}1\times9{,}81)=444{,}3\text{ N}$$

   c. Déplacement avec une décélération de 0,5 m.s^{-2}.

La composante de l'accélération est négative : $a_x=-0{,}5\text{ m/s}^2$ On utilise la même équation $F=m(a_x+f\,g)=300(-0{,}5+0{,}1\times9{,}81)=144{,}3\text{ N}$

   d. Combien de temps faut-il au portail pour s'arrêter si F = 0 alors que la vitesse est égale à 8,5 m/min ?

Si la force s'annule, l'équation ci-dessus devient $-f\,m\,g=m\,a_x$ soit $-f\,g=a_x$. Le terme à gauche de l'équation est une constante donc l'accélération est une constante.

Puisque l'accélération est constante, on peut écrire $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ et l'équation $-f g = a_x$ devient

$-f g = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ dont il faut sortir la durée de freinage Δt : $\Delta t = \frac{\Delta v_x}{-f g} = \frac{0 - \frac{8{,}5}{60}}{-0{,}1 \times 9{,}81} = 0{,}144 \text{ s}$

Attention : la variation de vitesse Δv_x est négative car la vitesse finale (0 m/min) est plus faible que la vitesse initiale (8,5 m/min).

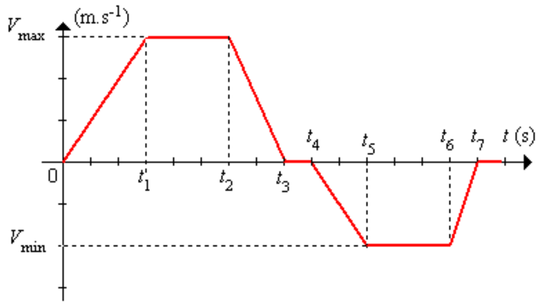
e. En partant du portail à l'arrêt, calculer la valeur minimale de F pour que le portail commence à se déplacer (utiliser le coefficient d'adhérence).

Le portail est à l'arrêt, la vitesse et sa dérivée sont nulles, on peut donc écrire $-\tan \varphi_0 m g + F = 0$ en remplaçant le coefficient de frottement par le coefficient d'adhérence (il faut vaincre les « forces d'adhérence »).

On obtient $F = \tan \varphi_0 m g = 0{,}2 \times 300 \times 9{,}81 = 588{,}6 \text{ N}$

3. Étude d'un cycle de fonctionnement

Le portail se déplace avec le profil de vitesse représenté ci-contre (V_{max} = 9 m/min et V_{min} = - 6 m/min).



a. Calculer F pour que le portail démarre aux instants 0 et t_4.

Cette force correspond à celle déterminée à la question 2.e soit 588,6 N.

b. Calculer F entre 0^+ (juste après le démarrage) et t_1 lorsque t_1 = 2 s puis lorsque t_1 = 3 s.

Il s'agit d'une phase d'accélération telle que $a_x = \frac{V_{max} - 0}{t_1 - 0} = \frac{V_{max}}{t_1}$. On utilise la relation $F = m(a_x + f g)$ (voir la question 2.b) qui devient $F = m\left(\frac{V_{max}}{t_1} + f g\right)$.

Pour t_1 = 2 s : $F = 300\left(\frac{\frac{9}{60}}{2} + 0{,}1 \times 9{,}81\right) = 316{,}8 \text{ N}$

Pour t_1 = 3 s : $F = 300\left(\frac{\frac{9}{60}}{3} + 0{,}1 \times 9{,}81\right) = 309{,}3 \text{ N}$

Pour un démarrage plus « progressif », la force nécessaire est plus faible.

c. Calculer F entre t_1 et t_2 puis entre t_5 et t_6.

Sur ces deux intervalles de temps, la vitesse est constante donc l'accélération nulle, on retrouve la relation de la question 2.a : $F = f m g = 0{,}1 \times 300 \times 9{,}81 = 294{,}3 \text{ N}$

d. Calculer F entre t_2 et t_3 lorsque $t_3 - t_2$ = 1 s.

Sur cette phase, il y a décélération : $a_x = \frac{-V_{max}}{t_3 - t_2}$. L'équation de la question 2.b donne

$$F = m(a_x + f g) = 300\left(\frac{-9}{60} + 0{,}1 \times 9{,}81\right) = 249{,}3 \text{ N}$$

e. Quelle(s) valeur(s) F ne doit pas dépasser entre t_3 et t_4 ?

Pour que le portail à l'arrêt reste immobile, il faut que le module F de la force reste inférieur à 588,6 N.

f. Calculer F entre t_4 et t_5 lorsque t_5 - t_4 = 2 s.

Dans cette phase, la vitesse augmente en valeur absolue mais le sens de déplacement est l'opposé de celui étudié précédemment : c'est une phase d'accélération dans « l'autre sens ». La composante tangentielle (horizontale) des forces de frottements est dans le sens positif de l'axe horizontal (comptée positive) alors que la force $\vec{F}$ est dirigée vers la gauche.

L'équation de la question 1.g ($-f\,m\,g+F=m\dfrac{dv_x}{dt}$ ou $-f\,m\,g+F=m\,a_x$) devient $f\,m\,g-F=m\,a_x$ soit $f\,m\,g-m\,a_x=F$ et finalement $F=m(f\,g-a_x)$

La composante a_x de l'accélération est négative : $a_x=\dfrac{-V_{\min}}{t_5-t_4}$. L'équation $F=m(f\,g-a_x)$ donne

$$F=300\left(0{,}1\times 9{,}81-\frac{\frac{-6}{60}}{2}\right)=309{,}3\text{ N}$$

Remarque : il est possible d'utiliser directement la relation trouvée à la question 1.g mais il ne faut pas tenir compte du fait que l'accélération est négative et écrire $a_x=\dfrac{V_{\min}}{t_5-t_4}$. On obtient alors le même résultat soit

$$F=300\left(\frac{\frac{6}{60}}{2}+0{,}1\times 9{,}81\right)$$

g. Calculer F entre t_6 et t_7 lorsque t_7 - t_6 = 1 s.

La composante a_x de l'accélération est positive : $a_x=\dfrac{0-(-V_{\min})}{t_7-t_6}$, c'est une phase de décélération dans « l'autre sens ». L'équation $F=m(f\,g-a_x)$ donne $F=300\left(0{,}1\times 9{,}81-\dfrac{\frac{6}{60}}{1}\right)=264{,}3\text{ N}$

Exercice 6 : Système de levage, partie rotation

On reprend le dispositif étudié précédemment (exercice 4) en s'intéressant à la poulie.
Le moment du couple dû à la masse (noté C_{masse}) est compté résistant lorsque la masse monte, moteur lorsqu'elle descend. Celui de la poulie (noté C_{poulie}) est compté moteur lorsque la charge monte et résistant lorsqu'elle descend.
Le moment d'inertie de l'ensemble ramené sur l'arbre est noté J_{eq} et égal à 1 kg.m^2. Le rayon R_p de la poulie est de 10 cm et sa vitesse angulaire est notée Ω_p .

1. Mise en équation

a. Exprimer le moment du couple dû à la masse en fonction de m et du rayon de la poulie.

Le poids de la masse agit sur l'axe de la poulie avec un rayon d'action R_p ce qui donne un couple de moment $C_{\text{masse}}=m\,g\,R_p$.

b. Écrire l'équation traduisant le principe fondamental de la dynamique pour la poulie en faisant apparaître C_{poulie} , J_{eq} , m et le rayon de la poulie.

Voir http://www.etasc.fr/index.php/page/cours/enoncePfdRotat/physiqueGenerale:pfd

La somme des couples moteur correspond à C_{poulie} et celle des couples résistants correspond à C_{masse} d'où la relation $C_{\text{poulie}}-C_{\text{masse}}=J_{\text{eq}}\dfrac{d\Omega_p}{dt}$ et comme $C_{\text{masse}}=m\,g\,R_p$ alors $C_{\text{poulie}}-m\,g\,R_p=J_{\text{eq}}\dfrac{d\Omega_p}{dt}$

2. Applications numériques

a. Calculer le couple C_{poulie} lorsque la masse est arrêtée.

Si la masse est arrêtée alors $\frac{d\Omega_p}{dt}$ est nulle, l'équation $C_{\text{poulie}} - m\,g\,R_p = J_{\text{eq}} \frac{d\Omega_p}{dt}$ devient $C_{\text{poulie}} - m\,g\,R_p = 0$ donc $C_{\text{poulie}} = m\,g\,R_p = 100 \times 9{,}81 \times 0{,}1 = 98{,}1 \text{ N.m}$

b. Calculer le couple C_{poulie} pour une accélération de la masse de 1,05 m.s^{-2}.

L'accélération indiquée dans l'énoncé est celle de la masse donc de la périphérie de la poulie, il faut en déduire l'accélération angulaire (en rad/s^2) de la poulie.

On a la relation $v_z = R_p \Omega_p$ soit en dérivant $\frac{dv_z}{dt} = R_p \frac{d\Omega_p}{dt}$ et $\frac{dv_z}{dt}$ est l'accélération de la masse.

On en tire donc l'accélération angulaire $\frac{d\Omega_p}{dt} = \frac{1}{R_p} \frac{dv_z}{dt}$. La relation $C_{\text{poulie}} - m\,g\,R_p = J_{\text{eq}} \frac{d\Omega_p}{dt}$ peut s'écrire $C_{\text{poulie}} - m\,g\,R_p = J_{\text{eq}} \frac{1}{R_p} \frac{d\,v_z}{dt}$ ce qui donne

$$C_{\text{poulie}} = J_{\text{eq}} \frac{1}{R_p} \frac{d\,v}{dt} + m\,g\,R_p = 1\,\frac{1}{0{,}1} \times 1{,}05 + 100 \times 9{,}81 \times 0{,}1 = 108{,}6 \text{ N.m}$$

c. Calculer le couple C_{poulie} pour une décélération de la masse de 0,51 m.s^{-2}.

La démarche est identique à la question précédente si ce n'est que l'accélération est négative

$$C_{\text{poulie}} = 1\,\frac{1}{0{,}1} \times (-0{,}51) + 100 \times 9{,}81 \times 0{,}1 = 93 \text{ N.m}$$

d. Tracer l'évolution de C_{poulie} en fonction du temps à partir du profil de T de la question 2 de l'exercice 4.

Pour calculer C_{poulie} à partir du profil, on utilise la relation $C_{\text{poulie}} = T\,R_p$ (la force de traction agit avec un rayon d'action égal à R_p).

	0 à t_1	t_1 à t_2	t_2 à t_4	t_4 à t_5	t_5 à t_6
T (N)	1030	981	930	981	1000
C_{poulie} (N.m)	103	98,1	93	98,1	100

e. Tracer l'évolution de la vitesse angulaire de rotation en fonction du temps.

Il y a deux méthodes possibles, l'une qui utilise la relation $v_z = R_p \Omega_p$ et les résultats de la question 2.f de l'exercice 4 ; l'autre qui utilise l'équation $C_{\text{poulie}} - m\,g\,R_p = J_{\text{eq}} \frac{1}{R_p} \frac{d\,v_z}{dt}$ (cette dernière est plus compliquée...)

De 0 à t_1 : la vitesse angulaire évolue de 0 à $\Omega_p = \frac{v_z}{R_p} = \frac{0{,}735}{0{,}1} = 7{,}35$ rad/s

De t_1 à t_2 : la vitesse angulaire est constante et égale à $\Omega_p = 7{,}35$ rad/s

De t_2 à t_4 : la vitesse angulaire évolue de $\Omega_p = 7{,}35$ rad/s à $\Omega_p = \frac{v_z}{R_p} = \frac{-1{,}02}{0{,}1} = -10{,}2$ rad/s en passant par 0 rad/s pour $t = t_3$.

De t_4 à t_5 : la vitesse angulaire est constante et égale à $\Omega_p = -10{,}2$ rad/s

De t_5 à t_6 : la vitesse angulaire évolue de $\Omega_p = -10{,}2$ rad/s à 0 rad/s

f. Calculer la puissance pour la poulie aux instants 0, t_1^-, t_1^+, t_2^-, t_2^+, t_3, t_4^-, t_4^+, t_5^-, t_5^+ et t_6.

Pour calculer la puissance, on utilise la relation $P = C_{\text{poulie}} . \Omega_{\text{p}}$

	0	t_1^-	t_1^+	t_2^-	t_2^+	t_3	t_4^-	t_4^+	t_5^-	t_5^+	t_6
P (W)	0	757	721	721	684	0	-949	-1000	-1000	-1020	0

3. Calcul du réducteur

Les valeurs du couple de la poulie et de sa vitesse angulaire ne correspondent pas à celles disponibles pour un moteur électrique, il est donc nécessaire de placer un réducteur.

a. Calculer le couple sur l'arbre moteur et sa vitesse de rotation si le rapport de réduction est égal à 10.

Si le rapport de réduction est égal à 10 alors la poulie tourne dix fois moins vite que le moteur ce qui donne une vitesse de rotation maximale de 102 rad/s pour le moteur.

La puissance sur l'arbre du moteur s'écrit $P_{\text{moteur}} = C_{\text{moteur}} \Omega_{\text{moteur}}$ avec C_{moteur} le couple sur l'arbre du moteur et Ω_{moteur} la vitesse angulaire de cet arbre. La puissance sur l'arbre de la poulie s'écrit $P_{\text{poulie}} = C_{\text{poulie}} \Omega_{\text{poulie}}$ avec C_{poulie} le couple sur l'arbre de la poulie et Ω_{poulie} la vitesse angulaire de cet arbre.

On aurait $P_{\text{moteur}} = P_{\text{poulie}}$ si le rendement du réducteur était égal à un mais comme $\eta_{\text{réducteur}} = 0{,}9$ alors $\eta_{\text{réducteur}} P_{\text{moteur}} = P_{\text{poulie}}$ soit $\eta_{\text{réducteur}} C_{\text{moteur}} \Omega_{\text{moteur}} = C_{\text{poulie}} \Omega_{\text{poulie}}$ (il serait préférable que le rendement soit donné pour cette question) ce qui donne

$$C_{\text{moteur}} = \frac{C_{\text{poulie}} \Omega_{\text{poulie}}}{\eta_{\text{réducteur}} \Omega_{\text{moteur}}} = \frac{1}{10\, \eta_{\text{réducteur}}} C_{\text{poulie}} = \frac{1}{10 \times 0{,}9} 103 = 11{,}4 \text{ N.m}$$

b. Calculer la puissance maximale du moteur en prenant un rendement du réducteur égal à 90% et en supposant que son inertie est négligeable.

La puissance maximale pour la poulie est de 1020 W (voir le tableau ci-dessus), cette puissance est la puissance utile P_{u} en sortie du réducteur (appelée P_{poulie} dans ce qui précède). La puissance P_{a} en entrée du réducteur (ou puissance absorbée, appelée P_{moteur} dans ce qui précède) est la puissance utile maximale du moteur. Les deux puissances sont reliées par $\eta = \frac{P_{\text{u}}}{P_{\text{a}}}$ avec η le rendement du réducteur, on obtient

$$P_{\text{a}} = \frac{P_{\text{u}}}{\eta} = \frac{1020}{0{,}9} = 1133 \text{ W}$$

Remarque : on obtient le même résultat aux arrondis près en faisant $P_{\text{moteur}} = C_{\text{moteur}} \Omega_{\text{moteur}} = 11{,}4 \times 102$

Exercice 7 : Portail coulissant, partie rotation

On reprend le dispositif étudié précédemment en s'intéressant à la roue dentée (engrenage). Le moment d'inertie de l'ensemble ramené sur l'arbre est noté J_{eq} et égal à 0,75 kg.m². Le rayon de la roue dentée est égal à 5 cm.

1. Mise en équation

a. Exprimer le moment du couple moteur en fonction du rayon de la roue dentée et du module de $\vec{F}$.

La force agit avec un rayon d'action égal à R = 5 cm ce qui donne $C_{\text{moteur}} = F\, R$

b. Exprimer le moment du couple résistant en fonction du rayon de la roue dentée et du module des forces de frottement.

La composante tangentielle R_{t} de chaque force de frottement agit avec le rayon d'action R : $C_{\text{r}} = 2 R_t R$ et comme $R_t = f \frac{mg}{2}$ alors $C_{\text{r}} = f\, m\, g\, R$

2. Applications numériques

a. Calculer C_{moteur} lorsque le portail avance à vitesse constante.

La vitesse angulaire de la roue dentée est aussi constante, sa dérivée est donc nulle et $C_{\text{moteur}}=C_{\text{r}}$. On obtient $C_{\text{moteur}}=0{,}1\times300\times9{,}81\times0{,}05=14{,}7\ \text{N.m}$

b. Calculer C_{moteur} pour une accélération de 0,5 m.s^{-2} puis pour une décélération de 0,5 m.s^{-2}.

Pour le passage de l'accélération linéaire (en m/s^2) à l'accélération angulaire (en rad/s^2), le raisonnement est identique à celui de la question 2.b de l'exercice 6.

L'équation $C_{\text{moteur}}-C_{\text{r}}=J_{\text{eq}}\dfrac{d\Omega}{dt}$ devient $C_{\text{moteur}}-C_{\text{r}}=J_{\text{eq}}\dfrac{1}{R}\dfrac{dv_{\text{x}}}{dt}$ et en remplaçant C_{r} par son expression, on obtient :

$C_{\text{moteur}}=J_{\text{eq}}\dfrac{1}{R}\dfrac{dv_{\text{x}}}{dt}+f\,m\,g\,R=0{,}75\dfrac{1}{0{,}05}\times0{,}5+0{,}1\times300\times9{,}81\times0{,}05=22{,}2\ \text{N.m}$ pour une accélération de 0,5 m.s^{-2}

et $C_{\text{moteur}}=0{,}75\dfrac{1}{0{,}05}\times(-0{,}5)+0{,}1\times300\times9{,}81\times0{,}05=7{,}2\ \text{N.m}$ pour une décélération de 0,5 m.s^{-2}

c. Tracer le profil de la vitesse angulaire de la roue dentée à partir du profil de vitesse de la question 3 de l'exercice 2.

On utilise la relation $v_{\text{x}}=R\,\Omega$ soit $\Omega=\dfrac{v_{\text{x}}}{R}$

de 0 à t_1 : la vitesse angulaire évolue de 0 à 3 rad/s

de t_1 à t_2 : la vitesse angulaire est constante et égale à 3 rad/s

de t_2 à t_3 : la vitesse angulaire diminue de 3 rad/s à 0 rad/s

de t_3 à t_4 : la vitesse angulaire est nulle

de t_4 à t_5 : la vitesse angulaire évolue de 0 à -2 rad/s (le portail se déplace dans « l'autre sens »)

de t_5 à t_6 : la vitesse angulaire est constante et égale à -2 rad/s

de t_6 à t_7 : la vitesse angulaire évolue de -2 rad/s à 0 rad/s

d. Tracer l'évolution de C_{moteur} correspondant à ce profil.

Il y a, là encore, deux méthodes ; l'une qui utilise les valeurs de F trouvées à la question 3 de l'exercice 5 et la relation $C_{\text{moteur}}=F\,R$; l'autre, plus compliquée, qui utilise la relation $C_{\text{moteur}}-f\,m\,g\,R=J_{\text{eq}}\dfrac{1}{R}\dfrac{dv_{\text{x}}}{dt}$

	0 à t_1	t_1 à t_2	t_2 à t_3	t_3 à t_4	t_4 à t_5	t_5 à t_6	t_6 à t_7
F (N)	316,8 ou 309,3	294,3	249,3	0	279,3	294,3	264,3
C_{moteur} (N.m)	15,8 ou 15,5	14,7	12,5	0	14,0	14,7	13,2

e. Calculer le couple moteur (couple au démarrage) permettant de démarrer le portail.

Il s'agit de « vaincre les forces d'adhérence » dont le module est de 588,6 N soit un couple de $588{,}6\times0{,}05=29{,}4\ \text{N.m}$