Médian - SY01/A17. Durée 2 heures, 2 pages, 5 exercices.

Seul document autorisé : Formulaire manuscrit.
Barème indicatif : 2.5, 2.5, 3, 5.5, 6.5
La clarté et la rigueur de la rédaction seront prises en compte.

Exercice 1. Dans cet exercice les questions sont indépendantes.

1. Considérons la fonction $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par
$$F(t) = \begin{cases} 0, \text{ si } t < 1, \\ 0.25, \text{ si } 1 \leq t < 5, \\ 1, \text{ si } \geq 5. \end{cases}$$
Donner la loi de la variable aléatoire X dont F est la fonction de répartition.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour quelle valeur de c, $P(X = n) = \frac{c3^{n-1}}{3^{n+1}-2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ est-ce une probabilité ?

Exercice 2. Une urne contient N_b boules blanches et N_n boules noires. Posons $N = N_b + N_n$. On tire r boules avec remise dans une urne, il y a alors N^r tirages possibles.
Soit A_k l'événement « on a tiré exactement k boules blanches ».

1. Calculer $Card(A_k)$.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées. Déterminer la loi de X.
3. Reconnaître la loi de X.

Exercice 3. Un joueur tourne une roue. A chaque essai, il a une probabilité $1-p$ de tomber sur une case lui rapportant 1 euro et p de tomber sur la case « banqueroute » qui lui fera tout perdre et l'éliminera du jeu. Il débute avec une somme initiale égale à 0 euro et souhaite atteindre un gain G_0, après quoi, il quittera le jeu, s'il n'a pas déjà été contraint auparavant. Les résultats successifs sont supposés indépendants. Ceci sera formalisé par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes de probabilité p. Le gain final est noté G.

1. Sur un petit graphique, représenter rapidement les deux situations typiques pouvant se produire, et les valeurs possibles de G.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir le gain G_0 ?
3. En déduire l'espérance du gain final $E[G]$. Interpréter le résultat lorsque $1 > p > 0$ et G_0 tend vers l'infini.

Exercice 4. Dans un mot binaire, c'est-à-dire une suite de 0 ou 1, on appelle k-séquence toute suite de k 1 consécutifs n'étant ni précédée ni suivie de 1. Par exemple, le mot (110011010001110) possède une 1-séquence, deux 2-séquences et une 3-séquence.
On considère à présent un mot binaire aléatoire de longueur n : $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, les X_i étant des variables indépendantes et de même loi de Bernoulli $B(p)$ où $p \in [0,1]$ est fixé. On note alors

$$A_k = \{\text{le mot possède au moins une } k\text{-séquence}\};$$

1. Que vaut $P(A_n)$?
2. On considère le cas $n = 4$ et $k = 2$. Calculer $P(A_2)$ en fonction de p.
Indication : Combien y a-t-il de 2-séquences possibles dans un mot de longueur 4 ?
3. On suppose n quelconque et $k \geq n/2$. Écrire une formule généralisant celle de la question précédente et en déduire la valeur de $P(A_k)$ en fonction de p, n et k. La formule est-elle aussi vraie lorsque $k < n/2$?

TOURNEZ LA PAGE !

Exercice 5. Un message doit être transmis d'un point à un autre à travers N canaux successifs. Ce message peut prendre deux valeurs, 0 ou 1. Durant le passage par un canal, le message a la probabilité $p \in]0,1[$ d'être bruité, c'est-à-dire d'être transformé en son contraire, et $(1-p)$ d'être transmis fidèlement. Les canaux se comportent indépendamment les uns des autres.

1. Notons I_n l'événement : « en sortie du n-ème canal, le message est le même que celui transmis initialement ». Exprimer $P(I_{n+1})$ en fonction de $P(I_n)$ et de p.
2. En notant $p_n = P(I_n)$, donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n. Que vaut p_1 ?
3. On considère une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = (1-2p)u_n + p.$$

   Vérifier que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$, définie par $v_n = u_n - 1/2$ pour tout $n \geq 1$, est géométrique. En déduire v_n en fonction de p et v_1.
4. En déduire p_n en fonction de p pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$.
5. Que vaut $\lim_{N\to+\infty} p_N$?
   Indication : distinguer suivant les valeurs de p.