

Exo 2 Médian SMO1 - A18

- n chèvres
- 2 abris A et B + un pré
- chaque chèvre va dans A, B ou Pré avec proba $\frac{1}{3}$

$Y = \#$ de chèvres dans A, $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

$Z = \#$ d'abris vides, $Z(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

1- $Y \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{3})$ car chacune des chèvres a probabilité $\frac{1}{3}$ d'aller dans A, et ceci de manière indépendante.

2- Cf. Exo 7 du Ch. 2

3- $\mathbb{P}(Y=k \cap Z=2)$

• $\{Z=2\} = \{A \text{ et } B \text{ sont vides}\} = \{\text{tous les chèvres sont dans le Pré}\}$

• $k=0$: $\{Y=0\} = \{\text{aucune chèvre n'est dans A}\}$

$$= \{A \text{ est vide}\} \subset \underbrace{\{A \text{ et } B \text{ sont vides}\}}_{= \{Z=2\}}$$

Alors $\mathbb{P}(Y=0 \cap Z=2) = \mathbb{P}(Z=2) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ← chaque chèvre a probabilité $\frac{1}{3}$ d'aller au Pré.

$\Sigma: k \geq 1 : \{Y=k \wedge Z=2\} = \emptyset$ car il y a k chèvres dans A , mais A est vide, c'est impossible.

Donc $\mathbb{P}(Y=k \wedge Z=2) \Rightarrow \forall k \geq 1$

4 - $\mathbb{P}(Y=k \wedge Z=1)$

• $\{Z=1\} = \{\text{un seul abri est vide}\}$

$$k \neq 0, \quad \mathbb{P}(Y=k \wedge Z=1) = \mathbb{P}(Y=k \wedge \text{"B vide"}) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

ici k chèvres dans A et B vide, donc le reste est dans le pré

On choisit les chèvres qui vont dans A avec proba $\frac{1}{3}$ elles vont dans A avec proba $\frac{1}{3}$ les autres vont dans le pré avec proba $\frac{1}{3}$ ainsi

$$k=0 \quad \mathbb{P}(Y=0 \wedge Z=1) = \mathbb{P}(\text{"A est vide et B non"})$$

$$= \mathbb{P}(\text{"les } n \text{ chèvres choisissent B ou le pré"})$$

$$- \mathbb{P}(\text{"B est vide car elles vont toutes au pré"})$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$5- P(Y=k \cap Z=\emptyset)$$

$$\bullet k=0 \quad P(Y=\emptyset \cap Z=\emptyset) = 0$$

A est vide \cap aucun alibi n'est vide

$$\bullet k \neq 0 \quad P(Y=k \cap Z=\emptyset)$$

= P ("k chèvres dans A, mais B n'est pas vide")

$$= \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} - \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

on choisit les
k chèvres qui
sont dans A

↑
avec
prob. $\frac{1}{3}$

les autres
sont dans
B ou Pré

↑
k chèvres dans A et
les autres n-k dans le
pré

* On ne veut pas compter
ces cas, car B ne peut
pas être vide.